**ДЕПАРТАМЕНТ ВНУТРЕННЕЙ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ**
**ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ**
**ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**
**«АЛЕКСЕЕВСКИЙ КОЛЛЕДЖ»**

УТВЕРЖДАЮ:
Зам. директора по учебно-
методической работе
_______________ Г.Л.Решетникова

# Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

**по учебной дисциплине**
**Элементы высшей математики**

**Специальности**
**09.02.04 Информационные системы(по отраслям)**

**Волкова Н.М.,**
**преподаватель общеобразовательных дисциплин социально-экономического и технического профилей, общих гуманитарных и естественнонаучных дисциплин**

**Алексеевка – 2017**

Рассмотрены на заседании предметно-цикловой комиссии общих гуманитарных, социально-экономических и естественнонаучных дисциплин
Протокол № 1 от «31» 08 20 17 г.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине Элементы высшей математики специальности 09.02.04 Информационные системы(по отраслям)


Составитель:
Волкова Наталья Михайловна, преподаватель общеобразовательных дисциплин социально-экономического и технического профилей, общих гуманитарных и естественнонаучных дисциплин



Аннотация

Организация самостоятельной работы студентов учебной дисциплины «Элементы высшей математики» составлены в соответствии с Федеральным государственным общеобразовательным стандартом для СПО. Пособие включает методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы. Предназначено для студентов и преподавателей колледжей.



ОГАПОУ «Алексеевский колледж», 2017

## Введение.

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы по дисциплине Элементы высшей математики предназначены для обучающихся второго курса специальностей 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Основная задача образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Решение этой задачи вряд ли возможно только путем передачи знаний в готовом виде от преподавателя к обучающемуся. Необходимо перевести обучающегося из пассивного потребителя знаний в активного их творца, умеющего сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность. Следует признать, что самостоятельная работа обучающихся является не просто важной формой образовательного процесса, а должна стать его основой.

В соответствии с учебным планом на самостоятельную работу обучающихся отводится 58 часов.

Самостоятельная работа обучающихся проводится с **целью:**

- ✓ систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- ✓ углубления и расширения теоретических знаний;
- ✓ развития познавательных способностей и активности обучающихся: самостоятельности, ответственности и организованности, творческой инициативы;
- ✓ формирования самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

**Виды самостоятельной работы обучающихся по математике**

- решение заданий по образцу;
- опережающие домашние задания;
- выполнение заданий по алгоритму;
- типовые расчеты;
- составление алгоритмов для типовых заданий;
- составление и решение самостоятельно составленных заданий;
- выполнение графических работ;
- составление и заполнение таблиц для систематизации учебного материала;
- ответы на контрольные вопросы;
- творческие работы (доклад, сообщение).

**Возможные формы контроля**

- проверка выполненной работы преподавателем;
- отчет-защита обучающегося по выполненной работе перед преподавателем (и/или обучающимися группы);
- зачет;
- тестирование;
- контрольные работы.

**Критериями оценки результатов самостоятельной работы обучающихся являются**:

- уровень усвоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность ключевых (общеучебных) компетенций;
- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.**

## Раздел 1. Элементы линейной алгебры.

*Матрицей размером* $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из $m$ строк и $n$ столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$2\times 2 \qquad 3\times 3 \qquad 3\times 1 \qquad 1\times 1$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, $A$ или $B$.

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами $a_{ij}$: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, $a_{23}$ – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Главной диагональю* квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

**Равенство матриц**. Две матрицы $A$ и $B$ называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

**Транспонирование**. Рассмотрим произвольную матрицу $A$ из $m$ строк и $n$ столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу $B$ из $n$ строк и $m$ столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы $A$ с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы $A$ с тем же номером). Итак, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу $B$ называют *транспонированной* матрицей $A$, а переход от $A$ к $B$ *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице $A$, обычно обозначают $A^T$.

Связь между матрицей $A$ и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

**Пример.** Найти матрицу, транспонированную данной.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

**Сложение матриц.** Пусть матрицы $A$ и $B$ состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы $A$ и $B$ нужно к элементам матрицы $A$ прибавить элементы матрицы $B$, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц $A$ и $B$ называется матрица $C$, которая определяется по правилу, например,

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

**Примеры.** Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

**Умножение матрицы на число.** Для того чтобы умножить матрицу $A$ на число $k$ нужно каждый элемент матрицы $A$ умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы $A$ на число $k$ есть новая матрица, которая определяется по правилу

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix} \text{ или } (c_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Для любых чисел $a$ и $b$ и матриц $A$ и $B$ выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

**Примеры.**

1. $$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Найти 2A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C = -3A + 4B$.

Матрицу $C$ найти нельзя, т.к. матрицы $A$ и $B$ имеют разные размеры.

**Умножение матриц.** Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы $A$ не матрицу $B$ называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице $C$) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце $c_{13}$, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times p$, то получим матрицу $C$ размера $m \times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент $c_{ij}$ получается в результате произведения элементов $i$-ой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы $B$ и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

**Примеры.**

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = AB$.

   Найти элементы $c_{12}$, $c_{23}$ и $c_{21}$ матрицы $C$.

   $$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение матриц.

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   Найти $AB$ и $BA$.

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Найти $AB$ и $BA$.

$AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B{\cdot}A$ – не имеет смысла.

## ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

*Определителем второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

**Примеры.** Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$
2. $\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6=6$.
3. Вычислить определитель матрицы $D$, если $D=-A+2B$ и

$$A=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & -2\\ 14 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

*Определителем третьего порядка*, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

**Примеры.** Вычислить определитель третьего порядка.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9$$

### *Метод Крамера для решения систем линейных уравнений*

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

***Теорема. (Правило Крамера):***

<u>**Теорема.**</u> *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

*в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:*

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

*$\Delta$ = det A,  а $\Delta_i$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов $b_i$.*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

## Раздел 2. Основы математического анализа.

### Теоретический материал и примеры нахождения производной элементарных функций, сложной функции, производных и дифференциалов высших порядков

**Определение:** Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке $x_0$ называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x$, стремящемся к нулю.

**Производные элементарных функций.**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c - const$ | $0$ |
| $x^{\alpha}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $tgx$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |

**Правила дифференцирования.**

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$1)(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$2)(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$

$3)(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$4)\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

**Производная сложной функции**

Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

**Теорема 7.3.1.** *Пусть задана сложная функция* $z = F(x) = f(\varphi(x))$*; функция* $\varphi$ *имеет производную в точке* $x_0$*, а функция* $f$ *имеет производную в точке* $y_0 = \varphi(x_0)$*. Тогда функция* $F$ *имеет производную в точке* $x_0$ *и*

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

**Пример.** $z = F(x) = e^{\sin x}$,

$$F(x) = f(\varphi(x)),\ z = e^y = f(y),\ y = \varphi(x) = \sin x.$$

Тогда

$$F'(x) = e^y(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

**Пример.** Найдем дифференциал функции $z = \arcsin\ln(x^2 + a^2)$:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{d\ln(x^2+a^2)}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}} = \\ &= \frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}\,(x^2+a^2)} = \\ &= \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}\,(x^2+a^2)}. \end{aligned}$$

***Производные высших порядков***

Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке $x$ значение производной $f'(x)$. Эта функция $f'$ называется производной функции $f$, или *первой производной* от $f$. (Иногда саму исходную функцию $f$ называют *нулевой производной* и обозначают тогда $f^{(0)}$.) Функция $g_1(x) = f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках $x$ интервала $(a;b)$, которую мы обозначим $g_1'(x) = f''(x)$ и назовём *второй производной* функции $f(x)$. Если предположить, что вторая производная $g_2(x) = f''(x)$ существует во всех точках $x \in (a;b)$, то она может также иметь производную $g_2'(x) = f'''(x)$, называемую *третьей производной* функции $f(x)$, и т.д. Вообще, $n$*-й производной* функции $f(x)$ называется производная от предыдущей, $(n-1)$-й производной $g_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = g'_{n-1}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

если эта производная существует. $n$-я производная называется также *производной* $n$*-го порядка*, а её номер $n$ называется *порядком производной.*

При $n = 1; 2; 3$ первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: $f'(x), f''(x), f'''(x)$ или $y', y'', y'''$; при прочих $n$ -- числом в скобках в верхнем индексе: $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots$ или $y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задаёт мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени $x$, то вторая производная, то есть производная от $f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть *ускорение* значений $f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $(f''(x))' = (f'(x))''$).

**Пример 1.** Найдём вторую производную функции $f(x) = \sin^3 x$. Первая производная равна

$$f'(x) = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x;$$

далее находим

$$f''(x) = 3(\sin^2 x \cos x)' = 3(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x).$$

**Пример 2.** Пусть $y = f(x) = e^{kx}$. Тогда

$$y' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}; y'' = k(e^{kx})' = ke^{kx} \cdot k = k^2 e^{kx}; \ldots ; y^{(n)} = k^n e^{kx}; \ldots .$$

При $k = 1$ все производные оказываются равными исходной функции: $(e^x)^{(n)} = e^x.$

**Пример 3.** Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sin x$. Тогда

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x.$$

Поскольку четвёртая производная $y^{(4)}$ совпала с исходной функцией $y$, то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при $k = 0; 1; 2; \ldots$ получаем

$$y^{(4k)}(x) = \sin x; y^{(4k+1)}(x) = \cos x; y^{(4k+2)}(x) = -\sin x; y^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Заметим также, что

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 4\frac{\pi}{2}).$$

Легко видеть, что имеет место общая формула:

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

***Дифференциалы высших порядков.***

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x; dx) = f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении $dx$ аргумента $x$) как функцию переменного $x$ и найдём её дифференциал $d(df(x; dx)) = d^2 f(x; dx)$:

$$d^2 f(x; dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3 f(x; dx) = (f''(x)(dx)^2)' dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, $n$*-й дифференциал* $d^n f(x; dx)$, или *дифференциал* $n$*-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении $dx$); для него имеет место формула:

$$d^n f(x; dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

**Примеры.**

1. Найти значение производной функции

$y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_o = \frac{\pi}{12}$

**Решение.**

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

**Ответ:** $2\sqrt{3}$.

Примеры.

1.Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

2.$y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

3.$y = \ln x \cdot \cos x$, то $y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$.

4. $y = \frac{x^3}{\cos x}$, $y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$.

$$y = tgx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Теоретический материал и примеры нахождения интеграла способом подстановки, способом интегрирования по частям.**

В основе интегрирования способом подстановки (или замены переменной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем:

если $\int f(x)dx = F(x) + c, \int f(u)du = F(u) + c, где\ u(x)$ произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов: 1. $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) * \varphi'(t)\, dt$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.

2.$t = \varphi(x), где\ t$ – новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид:

$$\int f(\varphi(x)) * \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$$

Примеры:

Найти интегралы:

1. $\int \sin 3x\, dx$
2. $\int \frac{x^2}{8+x^3} dx$

Решение

1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент 3х подынтегральным функции sin 3x. Так как $d\,(3x) = 3dx$, то

$$\sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, \underbrace{d(3x)}_{3dx}$$

Следовательно, подстановка $3x = t$, приводит интеграл к табличному виду

$$\sin 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{3}\cos t + c$$

Возвращаясь к старой переменной х, окончательно получим: $\int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

**Запись в тетради должна выглядеть так:**

Пусть $3x = t, тогда\ 3\, dx = dt, dx = \frac{1}{3}dt$

$$\int \sin 3\, dx\ = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{3}\cos t + c = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$$

Ответ: $\frac{1}{3}\cos 3x + c$

2) Так как $d\,(8 + x^3) =, то\ \int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(8+x^3)}{8+x^3}$

Полагая, что $(8 + x^3) = t$, получим:

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{8 + x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln(8 + x^3) + c$$

Запись в тетради должна выглядеть так:

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{8 + x^3}$$

Решение:

Пусть $(8+x^3)=t$, тогда $3x^2\,dx=dt, x^2\,dx=\frac{1}{3}dt$

$$\int\frac{x^2 dx}{8+x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}ln|t|+c=\frac{1}{3}\ln(8+x^3)+c$$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln(8+x^3)+c$

Интегрирование по частям называется нахождение интеграла по формуле:

$$\int u\,dv=u*v-\int v\,du,$$

где u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x.

С помощью формулы отыскание интеграла $\int v\,du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

При нахождении интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx;\ \int P(x)sin\ ax\ dx; \int P(x)cos\ ax\ dx$ за u принимают многочлен P(x), а за dv – соответственно выражения $e^{ax}\,dx, \sin ax\,dx, \cos ax\,dx.$

При отыскании интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx;\ \int P(x)arcsin\ ax\ dx; \int P(x)arccos\ ax\ dx$ за u принимаются соответственно функции ln x, arcsin x, arccos x, а за dv – выражение P(x) dx.

Пример:

Найти интегралы:

1. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

Решение.

Пусть $u=\ln x, dv=\frac{dx}{x^3}, тогда\ du=\frac{1}{x}dx,\ a\ v=\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}$

Воспользовавшись формулой $\int udv=uv-\int vdu$ находим:

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\ln x*\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-\int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$$
$$=\frac{-2\ln x-1}{4x^2}+c$$

Ответ: $\frac{-2\ln x-1}{4x^2}+c.$

2. $\int(x-5)\cos x\,dx$

Решение.

Пусть $x-5=u, dv=\cos x\,dx, тогда\ du=dx$ $\qquad v=\int\cos x\,dx=\sin x$

Воспользовавшись формулой $\int udv=uv-\int vdu$ находим:

$$\int (x-5)\cos x\,dx = (x-5)\sin x - \int \sin x\,dx = (x-5)\sin x + cos\ x + c$$

Ответ: $(x-5)\sin x + \cos x + c$.

При вычислении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ способом замены переменной (или методом подстановки) данный определенный интеграл с новой переменной интегрирования t, причем старые пределы интегрирования $x_1 = a\ и\ x_2 = b$ заменяются новыми пределами

$$t_1 = \varphi_1;\ t_2 = \varphi_2(b):\ \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) * \varphi'(t)dt$$

Здесь предполагается, что функция $\varphi(t) и\ \varphi'(t)$ непрерывны в отрезке $[t_1;\ t_2]$, а функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[t_1;\ t_2]$.

Пример: Вычислить интегралы способом подстановки

1. $\int_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}dx$

   Решение.

   Введем новую переменную $t = \sqrt[3]{5x+2}$ отсюда $x = \frac{t^3-2}{5}$, dx=$\frac{3}{5}t^2dt$

   Найдем новые пределы интегрирования:

   $при\ x_1 = -2 \quad t_1 = \sqrt[3]{5*(-2)+2} = -2$

   $x_2 = 5 \qquad t_2 = \sqrt[3]{5*5+2} = 3$

   Следовательно,

   $$\int_{-3}^{5} \sqrt[3]{5x+2}dx = \int_{-2}^{3} t\frac{3}{5}t^2dt = \frac{3}{5}\int_{-2}^{3} t^3dt = \frac{3}{5} * \frac{1}{4}t^4 \Big|_{-2}^{3} =$$

   $$= \frac{3}{20}(81-16) = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

Ответ: $9\frac{3}{4}$