МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«АЛЕКСЕЕВСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

для специальности
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Алексеевка – 2024

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Составитель:
Кузнецова И.С., преподаватель ОГАПОУ «Алексеевский колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ 4

2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 6

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 7

4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ 18

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) определяют содержание самостоятельной работы обучающихся, ее назначение, формы организации и виды контроля.

Контролируемая самостоятельная работа направлена на углубление и закрепление знаний студента, развитие аналитических навыков по проблематике учебной дисциплины.

Самостоятельная работа обучающихся, рассматривается в как управляемая преподавателями (без их прямого участия) система организационно-педагогических условий, направленная на освоение практического опыта, умений и знаний в рамках предметов, дисциплин, междисциплинарных курсов по специальностям и профессиям в соответствии с ФГОС СПО.

Для обучающегося самостоятельная работа - способ активного, целенаправленного освоения, без непосредственного участия преподавателя, новых знаний, умений и опыта, личностных результатов, закладывающих основания в становлении профессиональных и общих компетенций, требуемых ФГОС СПО по специальности.

В рамках выполнения самостоятельной работы обучающийся должен владеть способами предметной деятельности: уметь понимать предложенные преподавателем цели, формулировать их самому; моделировать собственную деятельность и программировать ее; уметь оценивать конечные и промежуточные результаты своих действий; корректировать деятельность, иметь личностную готовность (высокий уровень самосознания, адекватность самооценки, рефлексивность мышления, самостоятельность, организованность, целенаправленность личности, сформированность волевых качеств) саморегуляции.

Целью самостоятельной работы обучающихся является:

1) формирование личностных результатов, общих и профессиональных компетенций;

2) формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;

3)формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, совершенствованию и самоорганизации;

4) углубление и расширение теоретических знаний;

5)систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;

6) развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности, организованности.

Основными формами самостоятельной работы обучающихся являются подготовка сообщений и опорных конспектов.

В соответствии с рабочей программой на самостоятельную учебную работу обучающегося отводится 6 часов.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Наименование разделов и тем	Кол-во часов	Виды заданий	Форма отчётности
	Раздел 1. Математический анализ	**2**		
1	Тема 1.2 Пределы и непрерывность функции	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 1.5 Определённый интеграл	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Раздел 2. Линейная алгебра	**2**		
1	Тема 2.1 Матрицы и определители	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 2.2 Системы линейных уравнений (СЛУ)	**1**	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности			
1	Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Всего	**6**		

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Методические рекомендации по решению примеров математического анализа

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение:

Подставляя вместо переменной ее предельное значение и используя свойства пределов, получим: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{1-4}{1-2}=3$.

Ответ: 3.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-1}$.

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преображаем функцию, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-1}=\frac{(x+1)(2x-5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-5}{x-1}.$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x^{2-1}}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-5}{x-1}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{2}$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

Решение:

Непосредственная подстановка значения переменной $x=\infty$ в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2. Получим:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}.$$

Но $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=0.$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}=\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Методические рекомендации по решению определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись $F(X)\Big|_a^b$? Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность $F(b) - F(a)$, то есть, находим число.

Например, интеграла $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования $[-5;-2]$ не входит в область определения подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный пример: $\int_{-2}^{3} tgx dx$. Здесь на отрезке интегрирования $[-2;3]$ тангенс терпит бесконечные разрывы в точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, и поэтому такого определённого интеграла тоже не существует.

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Свойства линейности:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \text{ где } k = const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

– это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно проводить замену переменной интегрирования, правда, по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы еще поговорим.

Для определенного интеграла справедлива **формула интегрирования по частям**: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} 2\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7(\ln 5 - 0) = 7\ln 5$$

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^4 + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4 \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница: $F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = \left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= \left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right) = \frac{80}{3}+\frac{28}{3} = 36$$

Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$$

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1-\left(-18+\frac{27}{2}+3\right) = \frac{7}{6}+\frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Пример 5

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в **таблицу интегралов** и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$. Но есть одна неувязочка, в табличном интеграле под корнем x^2, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $t = x^2$

Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$. Выясняем, во что превратится оставшаяся часть xdx подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал dt:

$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

Находим новые пределы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$t_1 = 0^2 = 0$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

Готово. И всего-то лишь…

Продолжаем решение.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right)-\ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0{,}35$$

(1) В соответствии с заменой **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования**.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ответ стремимся записать в максимально компактном виде, здесь я использовал свойства логарифмов.

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, **никаких обратных замен проводить не надо**.

Пример 6

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} x tg^2 x dx$$

Решаем.

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2xdx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = tg^2xdx \Rightarrow v = \int tg^2xdx = tgx - x$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

У кого возникли трудности с интегралом $\int tg^2xdx$, загляните на урок **Интегралы от тригонометрических функций**, там он подробно разобран.

$$(*) \overset{(1)}{=} (x(tgx - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(tgx - x)dx \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\left(tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(tg0 - 0) - \int_0^{\pi/4} tgxdx + \int_0^{\pi/4} xdx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} \overset{(4)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой интегрирования по частям.

(2) Для произведения $x(tgx - x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойства линейности, разделяя его на два интеграла. **Не путаемся в знаках!**

(3) Берем два оставшихся интеграла. Интеграл $\int tgxdx$ также разобран на уроке **Интегралы от тригонометрических функций**

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Далее ответ доводится «до ума». Повторюсь, будьте ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫ при подстановках и заключительных вычислениях. Здесь допускают ошибки чаще всего.

Если честно, я недолюбливаю формулу $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ и, по возможности, … обхожусь вообще без нее! Рассмотрим второй способ решения, с моей точки зрения он более рационален.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} xtg^2xdx$

На первом этапе я нахожу неопределенный интеграл: $\int xtg^2xdx = (*)$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = tg^2 x dx \Rightarrow v = \int tg^2 x dx = tgx - x$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$(*) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx = xtgx - x^2 - \int tgx dx + \int x dx =$$
$$= xtgx - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} = xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$$

Первообразная функция найдена. Константу C в данном случае добавлять не имеет смысла.

В чём преимущество такого похода? Не нужно «таскать за собой» пределы интегрирования, действительно, замучаться можно десяток раз записывать мелкие значки пределов интегрирования

На втором этапе я провожу проверку (обычно на черновике).

Тоже логично. Если я неправильно нашел первообразную функцию, то неправильно решу и определенный интеграл. Это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\left(xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|\right)' = (x)'tgx + x(tgx)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (\ln|\cos x|)' =$$
$$= 1 \cdot tgx + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = tgx + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \frac{\sin x}{\cos x} =$$
$$= tgx + \frac{x}{\cos^2 x} - x - tgx = \frac{x}{\cos^2 x} - x = \frac{x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{x \sin^2 x}{\cos^2 x} = xtg^2 x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, первообразная функция найдена верно.

Третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx = \left(xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \left(0 \cdot tg0 - \frac{0^2}{2} + \ln\cos 0\right) =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Методические рекомендации по решению примеров вычисление определителей

1) Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах).

Пример 1. Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 0+4 \\ 1+2 & 5+5 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найдите *2A-B*, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

2) Чтобы *умножить матрицу А на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Пример 3. Умножьте матрицу А на число 3.

Решение:

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3) Матрицу А можно умножить на матрицу В, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (произведением матриц будет называться матрица, каждый элемент, которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В).

Пример. вычислить произведение матриц $A^{\cdot}B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей

Для квадратных матриц вводится понятие *определителя - числа, характеризующего квадратную матрицу А.* Определитель матрицы А обозначается |A| или Δ.

Определителем первого порядка, называется элемент a_{11}:

$\Delta = |A| = a_{11}$. Например. А=(3), тогда |A|=3.

Определитель квадратной матрицы *A* (размера *2*x*2*) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *второго порядка* называется число, которое можно найти по правилу:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1)$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Пример 4. Вычислите определитель матрицы $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Решение: По формуле (1) находим:

$$\Delta=|B|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=2\cdot5-3\cdot4=10-12=-2$$

1 способ: определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\quad(2)$$

Пример 5. Вычислите определитель третьего порядка: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}$

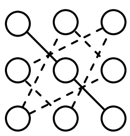
Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала правилом (2)

$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}$, а затем

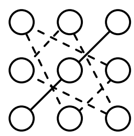
(для вычисления определителей 2-го порядка) правилом (1)

$\Delta=|A|=4-3+8+6+2+2=19$

2 способ: *определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по правилу треугольника (рис. 1):*



$$\begin{matrix}a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\\ a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\\ a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\end{matrix}$$



(3)

\+ рис. 1 -

Пример 6. Вычислите определитель третьего порядка по правилу треугольника

$A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}$.

Решение: применяя формулу (3), получим:

$\Delta=A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot4+2\cdot1\cdot1+(-1)\cdot3\cdot(-2)-1\cdot1\cdot(-2)-1\cdot3\cdot1-2\cdot(-1)\cdot4=$

$=4+2+6+2-3+8=19.$

Методические рекомендации по решению примеров основные математические методы в профессиональной деятельности

Методы решения задач на проценты

При решении задач на проценты приходится сталкиваться с понятием «концентрация» , «процентное содержание вещества в растворе».

Концентрация – отношение массы растворенного вещества к массе раствора.

Процентное содержание- отношение массы растворенного вещества к массе раствора, выраженное в процентах.

Задача: Определите концентрацию раствора, полученного при слиянии 150 г 30 %-го и 250 г 10 %-го растворов какой либо соли.

Дано: $m_1 = 150, \omega_1 = 30\ \%$

$m_2 = 250, \omega_2 = 10\ \%$

Найти: ω_3

Примечание: массовые доли обязательно будут удовлетворять неравенству : $\omega_1 > \omega_3 > \omega_2$

Решение:

<u>I способ.</u> Метод пропорций

Массу вещества в первом (30 %) растворе находим методом пропорций:

100 г р-ра - 30 г в-ва,

150 г р-ра - х г в-ва,

$x = \frac{150 \cdot 30}{100} = 45$ г

Массу вещества во втором (10 %) растворе находим аналогично:

100 г р-ра – 10 г в-ва,

250 г р-ра – у г в-ва,

$y = \frac{250 \cdot 10}{100} = 25\ г.$

Следовательно, 400 г нового раствора содержит 45+25= 70 г растворенного вещества.

Теперь определим концентрацию нового раствора:

400 г р-ра- 70 г в-ва

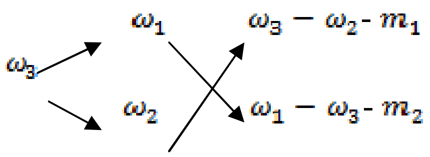
100 г р-ра – z в-ва

$z = \frac{100 \cdot 70}{400} = 17{,}5\ г, или\ 17{,}5\ \%$

Ответ: 17,5 %- процентная концентрация вещества в полученном растворе.

II способ. «Правило креста» (или «Конверт Пирсона»)

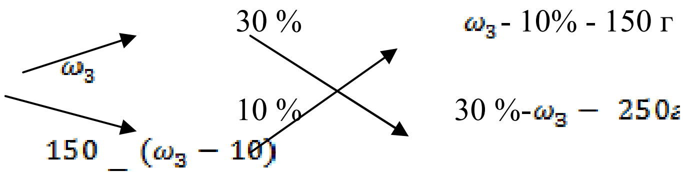
Метод заключается в применении схем (будем считать, что $(\omega_1 > \omega_3 > \omega_2)$



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\omega_3 - \omega_2)}{(\omega_1 - \omega_2)}$$

Отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности массовых долей растворенного вещества в смеси и во втором растворе к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.

Соответственно схеме подставим данные нашей задачи:



$$\frac{150}{250} = \frac{(\omega_3 - 10)}{(30 - \omega_3)}$$

Тогда $(30-\omega_3)\cdot 150=(\omega_3-10)\cdot 250$

$4500-150\omega_3=250\omega_3-2500$

$400\omega_3=7000$

$\omega_3=\frac{7000}{400}=17{,}5$ %

Ответ: 17,5 %

3 способ. Алгебраический.

Масса растворенного вещества в смеси будет слагаться из масс растворенного вещества в исходных растворах, поэтому для удобства решения, данные запишем в виде схемы:

150 г	+	250 г	=	(150+250) г

Масса сухого вещества в первом растворе $150\cdot\frac{30}{100}$ г

Масса сухого вещества во втором растворе $250\cdot\frac{10}{100}$ г

Масса сухого вещества в получившемся растворе $\frac{\omega_3}{100}(150+250)$ г

Составим уравнение:

$150\cdot\frac{30}{100}+250\cdot\frac{10}{100}=\frac{\omega_3}{100}(150+250)$

Умножим обе части равенства на 100:

$150\cdot 30+250\cdot 10=\omega_3(150+250)$

$$\omega_3=\frac{(150\cdot 30+250\cdot 10)}{150+250}=17{,}5\ \%$$

Ответ: 17,5 %

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

перечень учебных изданий, электронных изданий, электронных и Интернет-ресурсов, образовательных платформ, электронно-библиотечных систем, веб-систем для организации дистанционного обучения и управления им, используемые в образовательном процессе как основные и дополнительные источники.

Основные источники:

1. Математика. Алгебра и начала мат. анализа, геометрия. 10-11 кл.: Учебник. Баз.иуглубл. уровни ФГОС / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева.- М.: Просвещение, 2021.-463 с
2. Григорьев, С.Г. Математика: учебник для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования/С.Г.Григорьев, С. В. Иволгина. – 5-е изд. стер. - Москва: Издательский центр «Академия», 2020 – 416 с. – ISBN-978-5-4468-9248-8. – URL: https://academia-moscow.ru/catalogue/5395/477592/

Дополнительные источники:

3. Подольский В.А. Сборник задач по математике: Учеб.пособие.-2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк., 1999.-495 с.

Электронные издания (электронные ресурсы)

4. Информационно-образовательная среда «Российская электронная школа» https://resh.edu.ru/:

-https://resh.edu.ru/subject/lesson/4921/start/200887/

- https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/start/200980/

- https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/start/201073/

-https://resh.edu.ru/subject/lesson/4924/start/225713/

- https://resh.edu.ru/subject/lesson/3993/start/225744/

Цифровая образовательная среда СПО PROFобразование:

- Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 c. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/81274 (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Березина, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 158 c. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/80978 (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 479 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3461-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавриата и специалитета / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10169-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05640-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — 2-е изд. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 304 c. — ISBN 978-985-06-2884-8 (ч. 1), 978-985-06-2885-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/90754 (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.2.

Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2016. — 272 с. — ISBN 978-985-06-2766-7 (ч. 2), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/90755 (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 320 с. — ISBN 978-985-06-2798-8 (ч. 3), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/90756 (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Электронно-библиотечная система:

IPR BOOKS - http://www.iprbookshop.ru/78574.html

Веб-система для организации дистанционного обучения и управления им:

Система дистанционного обучения ОГАПОУ «Алексеевский колледж» http://moodle.alcollege.ru/