

Приложение ППСЗ по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
2023-2024 уч.г.: Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по
учебной дисциплине ЕН.01 Математика

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«АЛЕКСЕЕВСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

**Методические рекомендации
по организации самостоятельной работы студентов**

по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

для специальности
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Составитель:

Волкова Н.М., преподаватель ОГАПОУ «Алексеевский колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	4
2. ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	6
3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	7
4. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ	18

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) определяют содержание самостоятельной работы обучающихся, ее назначение, формы организации и виды контроля.

Контролируемая самостоятельная работа направлена на углубление и закрепление знаний студента, развитие аналитических навыков по проблематике учебной дисциплины.

Самостоятельная работа обучающихся, рассматривается в как управляемая преподавателями (без их прямого участия) система организационно-педагогических условий, направленная на освоение практического опыта, умений и знаний в рамках предметов, дисциплин, междисциплинарных курсов по специальностям и профессиям в соответствии с ФГОС СПО.

Для обучающегося самостоятельная работа - способ активного, целенаправленного освоения, без непосредственного участия преподавателя, новых знаний, умений и опыта, личностных результатов, закладывающих основания в становлении профессиональных и общих компетенций, требуемых ФГОС СПО по специальности.

В рамках выполнения самостоятельной работы обучающийся должен владеть способами предметной деятельности: уметь понимать предложенные преподавателем цели, формулировать их самому; моделировать собственную деятельность и программировать ее; уметь оценивать конечные и промежуточные результаты своих действий; корректировать деятельность, иметь личностную готовность (высокий уровень самосознания, адекватность самооценки, рефлексивность мышления, самостоятельность, организованность, целенаправленность личности, сформированность волевых качеств) саморегуляции.

Целью самостоятельной работы обучающихся является:

- 1) формирование личностных результатов, общих и профессиональных компетенций;
- 2) формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- 3) формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, совершенствованию и самоорганизации;
- 4) углубление и расширение теоретических знаний;
- 5) систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- 6) развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности, организованности.

Основными формами самостоятельной работы обучающихся являются подготовка сообщений и опорных конспектов.

В соответствии с рабочей программой на самостоятельную учебную

работу обучающегося отводится 6 часов.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Наименование разделов и тем	Кол-во часов	Виды заданий	Форма отчётности
	Раздел 1. Математический анализ	2		
1	Тема 1.2 Пределы и непрерывность функции	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 1.5 Определённый интеграл	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Раздел 2. Линейная алгебра	2		
1	Тема 2.1 Матрицы и определители	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 2.2 Системы линейных уравнений (СЛУ)	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Раздел 4. Основные математические методы в профессиональной деятельности			
1	Тема 4.1 Применение методов математического анализа при решении экономических задач	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
2	Тема 4.2 Простейшее приложение линейной алгебры в экономике	1	Изучение конспекта лекций, решение задач по образцу.	Решение задач в тетради
	Всего	6		

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ДЛЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Методические рекомендации по решению примеров математического анализа

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Решение:

Подставляя вместо переменной ее предельное значение и используя свойства пределов, получим: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = 3$.

Ответ: 3.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$.

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Преобразуем функцию, разложив

числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(2x - 5)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2x - 5}{x - 1}.$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$.

Решение:

Непосредственная подстановка значения переменной $x = \infty$ в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2 . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}.$$

$$\text{Но } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = 0.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Методические рекомендации по решению определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Этапы решения определенного интеграла следующие:

- 1) Сначала находим первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись $F(x) \Big|_a^b$? Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.
- 2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.
- 3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.
- 4) Рассчитываем (без ошибок!) разность $F(b) - F(a)$, то есть, находим число.

Например, интеграла $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования $[-5; -2]$ не входит в **область определения** подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный

пример: $\int_{-2}^3 \operatorname{tg} x dx$. Здесь на отрезке интегрирования $[-2; 3]$ **тангенс** терпит **бесконечные разрывы** в точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, и поэтому такого определённого интеграла тоже не существует.

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Свойства линейности:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k = \text{const}$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

– это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно проводить **замену переменной интегрирования**, правда, по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы еще поговорим.

Для определенного интеграла справедлива [формула интегрирования по частям](#):

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot \frac{1}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7 dx}{x}$$

$$\int_1^5 \frac{7 dx}{x} = 7 \int_1^5 \frac{dx}{x} = 7 (\ln x) \Big|_1^5 = 7 (\ln 5 - \ln 1) = 7 (\ln 5 - 0) = 7 \ln 5$$

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &\stackrel{(1)}{=} 8 \int_{-2}^4 dx + 2 \int_{-2}^4 x dx - \int_{-2}^4 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} 8(x) \Big|_{-2}^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_{-2}^4 \stackrel{(3)}{=} \\ &= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3} (4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3} (64 + 8) = \\ &= 48 + 12 - 24 = 36 \end{aligned}$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$F(X) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \\ &= \left(32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left(-16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36 \end{aligned}$$

Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx \\ \int_{-3}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx &= \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 - \left(-18 + \frac{27}{2} + 3 \right) = \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Пример 5

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}}$$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в [таблицу интегралов](#) и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный

логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C$

. Но есть одна неувязочка, в табличном интеграле под корнем x^2 , а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 16}} = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2)^2 + 16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $t = x^2$

Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2 + 16}$. Выясняем, во что превратится оставшаяся часть $x dx$ подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал dt :

$$dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

Находим новые пределы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0$$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Готово. И всего-то лишь...

Продолжаем решение.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 16}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \left(\ln \left| t + \sqrt{t^2 + 16} \right| \right) \Big|_0^3 \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left(\ln(3 + \sqrt{25}) - \ln(0 + \sqrt{0 + 16}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8}{4} \right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35 \end{aligned}$$

(1) В соответствии с заменой записываем **новый интеграл с новыми пределами интегрирования.**

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница

Ответ стремимся записать в максимально компактном виде, здесь я использовал свойства логарифмов.

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, **никаких обратных замен проводить не надо.**

Пример 6

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{4}} x t g^2 x dx$$

Решаем.

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{tg}^2 x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

У кого возникли трудности с интегралом $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, загляните на урок [Интегралы от тригонометрических функций](#), там он подробно разобран.

$$\begin{aligned} (*) &= (x(\operatorname{tg} x - x)) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x - x) dx = \frac{(1)}{4} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - 0 \cdot (\operatorname{tg} 0 - 0) - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx + \int_0^{\pi/4} x dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{(2)}{4} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - 0 \cdot (\operatorname{tg} 0 - 0) - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx + \int_0^{\pi/4} x dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \ln |\cos 0| + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2 \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой интегрирования по частям.

(2) Для произведения $x(\operatorname{tg} x - x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойства линейности, разделяя его на два интеграла. **Не путаемся в знаках!**

(3) Берем два оставшихся интеграла. Интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$ также разобран на уроке [Интегралы от тригонометрических функций](#)

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Далее ответ доводится «до ума». Повторюсь, будьте ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫ при подстановках и заключительных вычислениях. Здесь допускают ошибки чаще всего.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Если честно, я недолюбливаю формулу $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ и, по возможности, ... обхожусь вообще без нее! Рассмотрим второй способ решения, с моей точки зрения он более рационален.

Вычислить $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx$ определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx$$

На первом этапе я нахожу неопределенный интеграл:

$$\int x \operatorname{tg}^2 x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \operatorname{tg}^2 x dx \Rightarrow v = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} (*) &= x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) dx = x \operatorname{tg} x - x^2 - \int \operatorname{tg} x dx + \int x dx = \\ &= x \operatorname{tg} x - x^2 + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} = x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| \end{aligned}$$

Первообразная функция найдена. Константу C в данном случае добавлять не имеет смысла.

В чём преимущество такого похода? Не нужно «таскать за собой» пределы интегрирования, действительно, замучаться можно десяток раз записывать мелкие значки пределов интегрирования

На втором этапе я провожу проверку (обычно на черновике).

Тоже логично. Если я неправильно нашел первообразную функцию, то неправильно решу и определенный интеграл. Это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\begin{aligned} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| \right)' &= (x)' \operatorname{tg} x + x (\operatorname{tg} x)' - \frac{1}{2} (x^2)' + (\ln |\cos x|)' = \\ &= 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \operatorname{tg} x = \frac{x}{\cos^2 x} - x = \frac{x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{x \sin^2 x}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, первообразная функция найдена верно.

Третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx &= \left(x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \left(0 \cdot \operatorname{tg} 0 - \frac{0^2}{2} + \ln \cos 0 \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Методические рекомендации по решению примеров вычисление определителей

1) Чтобы найти сумму матриц A , B одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах).

Пример 1. Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 0+4 \\ 1+2 & 5+5 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найдите $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Имеем: } \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

2) Чтобы умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Пример 3. Умножьте матрицу A на число 3.

Решение:

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

3) Матрицу A можно умножить на матрицу B , когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (произведением матриц будет называться матрица, каждый элемент, которой равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B).

Пример. вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей

Для квадратных матриц вводится понятие *определителя* - числа, характеризующего квадратную матрицу A . Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или Δ .

Определителем первого порядка, называется элемент a_{11} :

$$\Delta = |A| = a_{11}. \quad \text{Например. } A=(3), \text{ тогда } |A|=3.$$

Определитель квадратной матрицы A (размера 2×2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка называется число, которое можно найти по правилу:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1)$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Пример 4. Вычислите определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: По формуле (1) находим:

$$\Delta = |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

1 способ: определитель матрицы A размера 3×3 (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «раскрытие определителя по первой строке»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Пример 5. Вычислите определитель третьего порядка: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

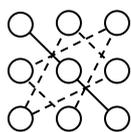
Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала правилом (2)

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ а затем}$$

(для вычисления определителей 2-го порядка) правилом (1)

$$\Delta = |A| = 4 - 3 + 8 + 6 + 2 + 2 = 19$$

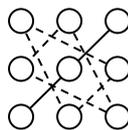
2 способ: определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по правилу треугольника (рис. 1):



+

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

рис. 1



-

(3)

Пример 6. Вычислите определитель третьего порядка по правилу треугольника

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение: применяя формулу (3), получим:

$$\begin{aligned} \Delta = A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 4 = \\ &= 4 + 2 + 6 + 2 - 3 + 8 = 19. \end{aligned}$$

Методические рекомендации по решению примеров основные математические методы в профессиональной деятельности

Методы решения задач на проценты

При решении задач на проценты приходится сталкиваться с понятием «концентрация», «процентное содержание вещества в растворе».

Концентрация – отношение массы растворенного вещества к массе раствора.

Процентное содержание- отношение массы растворенного вещества к массе раствора, выраженное в процентах.

Задача: Определите концентрацию раствора, полученного при слиянии 150 г 30 %-го и 250 г 10 %-го растворов какой либо соли.

Дано: $m_1 = 150, \omega_1 = 30 \%$

$m_2 = 250, \omega_2 = 10 \%$

Найти: ω_3

Примечание: массовые доли обязательно будут удовлетворять неравенству :

$\omega_1 > \omega_3 > \omega_2$

Решение:

I способ. Метод пропорций

Массу вещества в первом (30 %) растворе находим методом пропорций:

100 г р-ра - 30 г в-ва,

150 г р-ра - x г в-ва,

$$x = \frac{150 \cdot 30}{100} = 45 \text{ г}$$

Массу вещества во втором (10 %) растворе находим аналогично:

100 г р-ра – 10 г в-ва,

250 г р-ра – y г в-ва,

$$y = \frac{250 \cdot 10}{100} = 25 \text{ г.}$$

Следовательно, 400 г нового раствора содержит 45+25= 70 г растворенного вещества.

Теперь определим концентрацию нового раствора:

400 г р-ра- 70 г в-ва

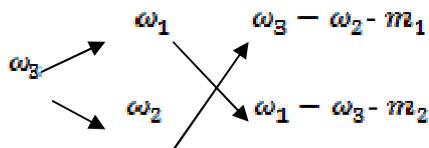
100 г р-ра – z в-ва

$$z = \frac{100 \cdot 70}{400} = 17,5 \text{ г, или } 17,5 \%$$

Ответ: 17,5 %- процентная концентрация вещества в полученном растворе.

II способ. «Правило креста» (или «Конверт Пирсона»)

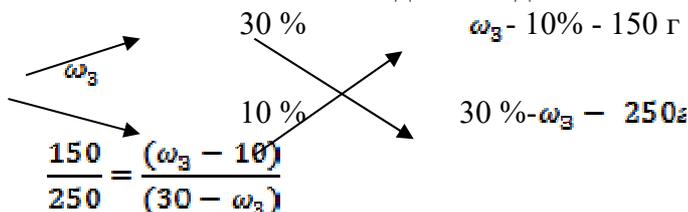
Метод заключается в применении схем (будем считать, что $(\omega_1 > \omega_3 > \omega_2)$)



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\omega_3 - \omega_2)}{(\omega_1 - \omega_2)}$$

Отношение массы первого раствора к массе второго раствора есть отношение разности массовых долей растворенного вещества в смеси и во втором растворе к разности соответствующих величин в первом растворе и в смеси.

Соответственно схеме подставим данные нашей задачи:



$$\text{Тогда } (30 - \omega_3) \cdot 150 = (\omega_3 - 10) \cdot 250$$

$$4500 - 150\omega_3 = 250\omega_3 - 2500$$

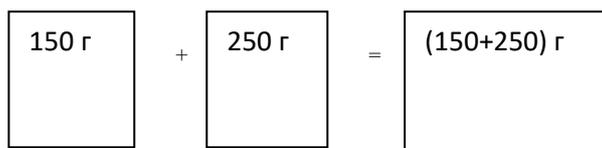
$$400\omega_3 = 7000$$

$$\omega_3 = \frac{7000}{400} = 17,5 \%$$

Ответ: 17,5 %

3 способ. Алгебраический.

Масса растворенного вещества в смеси будет складываться из масс растворенного вещества в исходных растворах, поэтому для удобства решения, данные запишем в виде схемы:



Масса сухого вещества в первом растворе $150 \cdot \frac{30}{100}$ г

Масса сухого вещества во втором растворе $250 \cdot \frac{10}{100}$ г

Масса сухого вещества в получившемся растворе $\frac{\omega_3}{100} (150+250)$ г

Составим уравнение:

$$150 \cdot \frac{30}{100} + 250 \cdot \frac{10}{100} = \frac{\omega_3}{100} (150 + 250)$$

Умножим обе части равенства на 100:

$$150 \cdot 30 + 250 \cdot 10 = \omega_3 (150 + 250)$$

$$\omega_3 = \frac{(150 \cdot 30 + 250 \cdot 10)}{150 + 250} = 17,5 \%$$

Ответ: 17,5 %

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

перечень учебных изданий, электронных изданий, электронных и Интернет-ресурсов, образовательных платформ, электронно-библиотечных систем, веб-систем для организации дистанционного обучения и управления им, используемые в образовательном процессе как основные и дополнительные источники.

Основные источники:

1. Математика. Алгебра и начала мат. анализа, геометрия. 10-11 кл.: Учебник. Баз.иуглубл. уровни ФГОС / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева.- М.: Просвещение, 2021.-463 с
2. Григорьев, С.Г. Математика: учебник для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования/С.Г.Григорьев, С. В. Иволгина. – 5-е изд. стер. - Москва: Издательский центр «Академия», 2020 – 416 с. – ISBN-978-5-4468-9248-8. – URL:

<https://academia-moscow.ru/catalogue/5395/477592/>

Дополнительные источники:

3. Подольский В.А. Сборник задач по математике: Учеб.пособие.-2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк., 1999.-495 с.
Электронные издания (электронные ресурсы)

4. Информационно-образовательная среда «Российская электронная школа» <https://resh.edu.ru/>:

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4921/start/200887/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/start/200980/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/start/201073/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4924/start/225713/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/3993/start/225744/>

Цифровая образовательная среда СПО PROФобразование:

- Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Березина, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 158 с. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80978> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 479 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3461-8. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для бакалавриата и специалитета / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10169-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Кремер, Н. Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 346 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05640-2. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт].

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — 2-е изд. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 304 с. — ISBN 978-985-06-2884-8 (ч. 1), 978-985-06-2885-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90754> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.2.

Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2016. — 272 с. — ISBN 978-985-06-2766-7 (ч. 2), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90755> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 320 с. — ISBN 978-985-06-2798-8 (ч. 3), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90756> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Электронно-библиотечная система:

IPR BOOKS - <http://www.iprbookshop.ru/78574.html>

Веб-система для организации дистанционного обучения и управления им:

Система дистанционного обучения ОГАПОУ «Алексеевский колледж»
<http://moodle.alcollege.ru/>