

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ  
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«АЛЕКСЕЕВСКИЙ КОЛЛЕДЖ»**

**Комплект  
контрольно-оценочных средств  
по учебной дисциплине**

# **ЕН 01. Математика**

**для специальности**

**10.02.05 Обеспечение информационной безопасности  
автоматизированных систем**

г. Алексеевка  
2023

Комплект контрольно-оценочных средств разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем

Разработчик:

Кузнецова И.С., преподаватель ОГАОУ «Алексеевский колледж»

## 1. Паспорт комплекта оценочных средств

### 1.1 Область применения комплекта оценочных средств

Контрольно-оценочные средства (КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем.

КОС включают контрольные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации в форме экзамена.

КОС разработан на основании рабочей программы учебной дисциплины ЕН 01 Математика.

### 1.2 Цели и задачи учебной дисциплины – требования к результатам освоения программы:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1 выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

У2 выполнять операции над множествами;

У3 применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

У4 использовать основные положения теории вероятностей и математической статистики;

У5 применять стандартные методы и модели к решению типовых вероятностных и статистических задач;

У6 пользоваться пакетами прикладных программ для решения вероятностных и статистических задач.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

31 основы линейной алгебры и аналитической геометрии;

32 основные положения теории множеств;

33 основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления;

34 основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;

35 основные статистические пакеты прикладных программ;

36 логические операции, законы и функции алгебры, логики.

Профессиональные (ПК) и общие (ОК) **компетенции**, которые актуализируются при изучении учебной дисциплины:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ПК 2.4. Осуществлять обработку, хранение и передачу информации ограниченного доступа.

**Планируемые личностные результаты освоения рабочей программы:**

ЛР 1. Осознающий себя гражданином и защитником великой страны.

ЛР 2. Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости, экономически активный и участвующий в студенческом и территориальном самоуправлении, в том числе на условиях добровольчества, продуктивно взаимодействующий и участвующий в деятельности общественных организаций.

ЛР 3. Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих.

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде лично и профессионально конструктивного «цифрового следа».

ЛР 9. Соблюдающий и пропагандирующий правила здорового и безопасного образа жизни, спорта; предупреждающий либо преодолевающий зависимости от алкоголя, табака, психоактивных веществ, азартных игр и т.д. Сохраняющий психологическую устойчивость в ситуативно сложных или стремительно меняющихся ситуациях.

### 1.3 Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

Наименование тем	Коды умений (У), знаний (З), личностных результатов (ЛР), формированию которых способствует элемент программы	Средства контроля и оценки результатов обучения в рамках текущей аттестации (номер задания)	Средства контроля и оценки результатов обучения в рамках промежуточной аттестации (номер задания/контрольного вопроса/ экзаменационного билета)
Тема 1.1. Матрицы и определители.	У1 З1 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 3	ПЗ № 1 ПЗ № 2	ЭБ №1
Тема 1.2. Системы линейных уравнений.	У1 З1 ЛР 2 ЛР 4 ЛР 9	ПЗ № 3 ПЗ № 4	ЭБ № 2
Тема 2.1. Векторы и координаты на плоскости.	ЛР 1 ЛР 2 ЛР 9	ПЗ № 5	ЭБ №3
Тема 2.2. Уравнение линии на плоскости	У1 З1 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 3	ПЗ № 6 ПЗ № 7	ЭБ №4
Тема 3.1. Множества.	У2 З2 ЛР 1 ЛР 3 ЛР 4	ТЗ № 3.1	ЭБ №5
Тема 3.2. Пределы и непрерывность функции.	У3 З3 ЛР 1 ЛР 3 ЛР 4	ПЗ № 8 ПЗ № 9	ЭБ №5
Тема 4.1. Производная	У3 З3 ЛР 1 ЛР 4 ЛР 9	ПЗ № 10 ПЗ № 11	ЭБ №6
Тема 4.2. Дифференциал	У3 З3 Л1 Л4	ПЗ № 12	ЭБ №8
Тема 4.3. Приложения	У3 З3	ПЗ № 13 ПЗ № 14	ЭБ №7

производной	ЛР 4 ЛР 9 ЛР 3		
Тема 5.1. Неопределенный интеграл	У3 З3 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 3	ПЗ № 15 ПЗ № 16	ЭБ №9
Тема 5.2. Определенный интеграл	У3 З3 ЛР 2 ЛР 4 ЛР 4	ПЗ № 17 ПЗ № 18	ЭБ №10
Тема 6.1. Основы алгебры логики	З6 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 3	ПЗ № 19	ЭБ №11
Тема 7.1. Основные понятия теории вероятностей.	У4 У5 З4 ЛР 1 ЛР 4 ЛР 9	ПЗ № 20	ЭБ №12
Тема 7.2. Вероятности событий.	У4 У5 З4 ЛР 2 ЛР 4 ЛР 9	ПЗ № 21 ПЗ № 22	ЭБ №13
Тема 7.3. Случайные величины	У4 У5 У6 З4 З5 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 3	ПЗ № 23	ЭБ №14
Тема 7.4. Основные понятия математической статистики.	У4 У5 У6 З4 З5 ЛР 1 ЛР 2 ЛР 9	ПЗ № 24	ЭБ №15

## 2. Комплект оценочных средств для текущей аттестации

### 2.1. Практические задания (ПЗ)

## ПЗ № 1. Тема: Выполнение операций над матрицами. Вычисление определителей.

Цели :

- рассмотреть теоретические основы темы, учить определять вид матрицы, её размер, выполнять действия над матрицами;
- развивать навыки работы с информацией, умение использовать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки информации;
- воспитывать аккуратность в расчетах; умение владеть навыками работы с информацией.

Вопросы для обсуждения:

1. Как записать матрицу размера  $m \times n$  ?
2. Как определить размер матрицы?
3. Как записать матрицу-строку?
4. Запишите матрицу-столбец?
5. Чем отличается квадратная матрица от прямоугольной?
6. Чем отличается диагональная матрица от единичной?
7. Может ли нулевая матрица быть размером  $5 \times 6$ ?
8. Какие виды матриц можно объединить под названием «квадратные матрицы»?
9. В чем заключается правило умножения матрицы на число?
10. В чем заключается правило сложения матриц?
11. В чем заключается правило умножения матрицы на матрицу?
12. Как возвести матрицу в степень?
13. Что происходит, когда матрица транспонируется?
14. Что происходит с матрицей, если её умножают на единичную матрицу? на нулевую матрицу?

Решение задач.

Задача 1. Даны матрицы:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислить: а)  $5A - (A+B)$ ; б)  $A^2$ ; в)  $B^3$ ; г)  $(AB)' - A^3$ .

Задача 2. Даны матрицы:  $C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$   $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$   $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Вычислить: а)  $CD - F'$  ; б)  $C' + (D F)'$

Задача 3. Вычислите  $AB$  и  $BA$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = (1 \ 0 \ 2 \ -1)$

Задача 4. Вычислить:  $(7 \ 7) \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Задача 5. Вычислить определители второго порядка: а)  $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ; в)

г)  $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$ ; д)  $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ ; е)  $\begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ 1+t^2 & 1+t^2 \\ -2t & 1-t^2 \\ 1+t^2 & 1+t^2 \end{vmatrix}$

Задача 6. Вычислить определители третьего порядка:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$  в)  $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  г)  $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}$  д)  $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

е)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$  ж)  $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$  з)  $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$  и)  $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix}$

### Аудиторная самостоятельная работа.

1. Найти матрицу  $C = A' - 3B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & * \\ 0 & * & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 5 & 6 \\ * & 3 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицу  $C = -5A + 2B$ , если  $A = \begin{pmatrix} * & 4 \\ 5 & * \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & * \\ * & 3 \end{pmatrix}$

3. Найти произведение матриц:  $\begin{pmatrix} * & -2 \\ 5 & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} * & -3 & 2 \\ 3 & -4 & * \\ 2 & * & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & * \\ 1 & * & 5 \\ * & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4. Найти матрицу  $A^*$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

5. Найти матрицу  $D = ABC - 3E$ , если  $A = \begin{pmatrix} * & 2 \cdot * & -3 \\ * & 0 & 2 \cdot * \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} * \\ 2 \cdot * \\ * \end{pmatrix}$ ,  $C = (2 \cdot * \ 0 \ 5)$ ,

$E$  – единичная матрица

6. Вычислить определители третьего порядка:

$$\begin{array}{l}
 \text{а)} \begin{vmatrix} 9 & * \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \cdot * & -4 \\ 4 & * & -2 \cdot * \\ 5 & 2 \cdot * & -3 \end{vmatrix} \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \cdot * \\ 2 \cdot * & -* & 8 \end{vmatrix} \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 4 & 2 \cdot * & -* \\ 5 & 3 & -2 \cdot * \\ 3 & 2 \cdot * & -* \end{vmatrix} \quad \text{д)} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & 2 \cdot * & 3 \\ * & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
 \text{е)} \begin{vmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ж)} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & * & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{з)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & * & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{и)} \begin{vmatrix} * & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{к)} \begin{vmatrix} * & 5 & 25 \\ * & 7 & 49 \\ * & 8 & 64 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

### **ПЗ № 2 Тема: Вычисление обратных матриц.**

Цели :

- рассмотреть алгоритмы нахождения обратной матрицы;
- вырабатывать умение определять обратную матрицу для данной;
- воспитывать аккуратность в расчетах; умение владеть навыками работы с информацией.

Вопросы для обсуждения.

1. Обратная матрица.
2. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
3. Вычисление обратной матрицы с помощью союзной (присоединенной) матрицы.

Решение задач.

Задача 1. Для данных матриц найти обратные.

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** Решить матричные уравнения.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

**Аудиторная самостоятельная работа.**

1. Для данных матриц найти обратные.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -* \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -* & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} -* & 15 & 2 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 9 & -4 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ * & -* & 0 \\ -* & 2 & * \end{pmatrix}$$

2. Решить матричные уравнения.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} * & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & * \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & * \\ 2 & * \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 2 & * \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} * & 3 \\ * & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} * & -* \\ -* & * \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X \cdot \begin{pmatrix} * & * & -* \\ 2 & * & 0 \\ * & -* & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -* & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{ д) } \begin{pmatrix} -* & 0 \\ * & -* \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -* & 0 \\ * & -* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} * & * & -* \\ 2 & * & 0 \\ * & -* & * \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} * \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

**ПЗ № 3. Тема: Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера.**

Цели :

- рассмотреть системы линейных уравнений и их решение с помощью формул Крамера;

- развивать умение решать системы линейных уравнений указанными методами;
- воспитывать аккуратность в расчетах, умение владеть навыками работы с информацией.

Решение задач.

Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера.

$$1. \begin{cases} 17x_1 - 9x_2 = -1 \\ -13x_1 + 19x_2 = 25 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 - 5x_2 = 40 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

**ПЗ № 4. Тема: Решение системы линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса**

Цели :

- рассмотреть системы линейных уравнений и их решение с помощью метода Гаусса и матричного метода;
- развивать умение решать системы линейных уравнений указанными методами;
- воспитывать аккуратность в расчетах, умение владеть навыками работы с информацией.

Решение задач.

Решить системы линейных уравнений матричным методом и методом Гаусса.

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{cases} 17x_1 - 9x_2 = -1 \\ -13x_1 + 19x_2 = 25 \end{cases} & 2. \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{cases} & 3. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases} \\ 4. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 - 5x_2 = 40 \end{cases} & 5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} & 6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \\ 7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases} & 9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases} \\ 10. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases} & 11. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases} & 12. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases} \end{array}$$

Литература:

3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред.

Н.Ш. Кремера. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.

4. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

**ПЗ № 5. Тема: Выполнение действий над векторами. Решение простейших задач аналитической геометрии на плоскости.**

Цели :

- рассмотреть векторное и смешанное произведение;
- развивать умение применять векторное и смешанное произведение векторов для вычисления площадей и объёмов;
- воспитывать аккуратность в расчетах, умение владеть навыками работы с информацией.

Вопросы для обсуждения.

1. Что называется вектором?
2. Как обозначается вектор?
3. Что называется длиной вектора?
4. Какие два вектора называют равными?
5. Какие два вектора называют коллинеарными?
6. Что представляют собой координаты вектора?
7. Какой вектор называют нулевым? Чему равна его длина?
8. Что представляет собой произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$ ?
9. Какой вектор называется противоположный данному?
10. Что называется суммой двух векторов?
11. Что называется суммой нескольких векторов?
12. Что называется разностью двух векторов?
13. Что называется скалярным произведением?
14. Что называется скалярным квадратом?
15. Как найти угол между векторами?
16. Векторное произведение векторов и его приложения.
17. Смешанное произведение векторов и его приложения.

Решение задач.

Задача 1. Даны векторы  $\vec{a}=(0;1;-3)$ ,  $\vec{b}=(-4;2;-2)$ . Найти угол между векторами

$$\vec{c} \text{ и } \vec{d}, \text{ если } \vec{c} = 2\vec{a}, \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}.$$

Задача 2. Вычислить  $(\vec{a} + \vec{b})^2$  и  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 135^\circ$

Задача 3. Даны вершины треугольника  $A(1;2;-3)$ ,  $B(0;1;2)$ ,  $C(2;1;1)$ . Найти длины сторон  $AB$  и  $BC$ , угол при вершине  $A$ .

Задача 4. Даны векторы  $\vec{a} = (2;-1;0)$ ,  $\vec{b} = (2;3;1)$ . Найти: а)  $\vec{a}\vec{b}$  б)  $\vec{b}^2$  в)  $(\vec{a} + \vec{b})^2$  д)  $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$ .

Задача 5. Найти площадь  $S$  и угол  $\varphi$  параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (1;-2;3)$ ,  $\vec{b} = (0;2;1)$ .

Задача 6. Даны вершины треугольника  $A(1;2;-3)$ ,  $B(0;1;2)$ ,  $C(2;1;1)$ . Найти площадь треугольника.

Задача 7. Даны координаты вершин пирамиды  $ABCD$ :  $A(0,0,1)$ ,  $B(2,3,5)$ ,  $C(6,2,3)$ ,  $D(3,7,2)$ . Требуется:

1. Записать векторы  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  в системе орт  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и найти модули этих векторов.
2. Найти угол между векторами  $\vec{AB}, \vec{AC}$
3. Найти проекцию вектора  $\vec{AD}$  на вектор  $\vec{AB}$
4. Найти площадь грани  $ABC$
5. Найти объём пирамиды  $ABCD$

Задача 8. Даны координаты вершин пирамиды  $ABCD$ :  $A(2,3,2)$ ,  $B(0,6,2)$ ,  $C(0,3,8)$ ,  $D(2,6,10)$ . Требуется:

1. Записать векторы  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  в системе орт  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и найти модули этих векторов.
2. Найти угол между векторами  $\vec{AB}, \vec{AC}$
3. Найти проекцию вектора  $\vec{AD}$  на вектор  $\vec{AB}$
4. Найти площадь грани  $ABC$
5. Найти объём пирамиды  $ABCD$

Аудиторная самостоятельная работа.

Задача 1.

1. Даны векторы  $\vec{a}=(1;0;-3)$ ,  $\vec{b}=(2;1;0)$ . При каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} - \alpha\vec{b}$  и  $\vec{a} + \alpha\vec{b}$  ортогональны.
2. Найти значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых векторы  $\vec{a} = (3;-1;\alpha)$  и  $\vec{b} = (2;\beta;1)$  взаимно перпендикулярны, если  $|\vec{b}| = 3$ .
3. Найти проекцию вектора  $\vec{b}=(1;-2;2)$  на вектор  $\vec{a}=(-1;2;3)$ .
4. Даны векторы  $\vec{a} = (1;-1;0)$ ,  $\vec{b} = (3;3;1)$ . Найти: а)  $\vec{a}\vec{b}$  б)  $\vec{b}^2$  в)  $(\vec{a} + \vec{b})^2$  д)  $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$ .
5. Найти значения  $\alpha$ , при которых векторы  $\vec{a} = (\alpha,-3,2)$  и  $\vec{b} = (1,2,-\alpha)$  взаимно перпендикулярны.
6. 13. Найти вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a}$  и удовлетворяющий условию: а)  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b}\vec{a} = 3$ ; б)  $\vec{a} = (-1;2;2)$ ,  $\vec{b}\vec{a} = -2$ .
7. 13. Найти вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a}$  и удовлетворяющий условию:  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b}\vec{a} = 3$ .
8. Даны вершины треугольника А(1;2;4), В(2;1;2), С(-2;1;3). Найти длины сторон АВ и ВС, угол при вершине А.
9. Даны векторы  $\vec{a}=(0;1;-3)$ ,  $\vec{b}=(-4;2;-2)$ . Найти угол между векторами  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ , если  $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a}$ .
10. Вычислить  $(\vec{a} + \vec{b})^2$  и  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$

**Задача 2.** Даны координаты вершин пирамиды ABCD: А(0,0,\*), В(2·\*,3,5), С(6,2·\*,3), D(3,7,2·\*). Требуется:

1. Записать векторы  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  в системе орт  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и найти модули этих векторов.
2. Найти угол между векторами  $\vec{AB}, \vec{AC}$
3. Найти проекцию вектора  $\vec{AD}$  на вектор  $\vec{AB}$
4. Найти площадь грани ABC
5. Найти объём пирамиды ABCD

Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

**ПЗ №6. Тема: Составление уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.**

Цели :

- рассмотреть различные виды уравнений прямой на плоскости;
- развивать умение решать геометрические задачи, связанные с преобразованием уравнений прямой на плоскости, и задачи, возникающие при работе с прямой линией на плоскости;
- воспитывать аккуратность в расчетах, умение владеть навыками работы с информацией.

Вопросы для обсуждения.

1. Прямоугольная система координат.
2. Что называется уравнением линии?
3. Уравнения прямой.
4. Тангенс угла между двумя прямыми.
5. Условия параллельности перпендикулярности двух прямых.

Решение задач.

Задача 1. Построить прямые:  $y = 3x - 4$ ;  $2x - y + 6 = 0$ ;  $3x + 5 = 0$ ;  $2y - 7 = 0$ ;  $y = -4$ ;  $2x + 7y = 0$ .

Задача 2. Вычислить угловой коэффициент  $k$  прямой, проходящей через две данные точки: *a*)  $M(2, -5)$ ,  $N(3, 2)$ , *b*)  $P(-3, 1)$ ,  $Q(7, 8)$ .

Задача 3. Записать уравнение прямой  $3x - 4y - 12 = 0$  в отрезках. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и координатными осями.

Задача 4. Даны параллельные прямые  $3x - y + 2 = 0$  и  $3x - y - 5 = 0$ . Написать уравнение прямой им параллельной и проходящей на равном от их расстоянии. Найти расстояние между данными прямыми.

Задача 5. Дан отрезок АВ с концами  $A(1;-3)$ ,  $B(0;2)$ . Написать уравнение прямой, соединяющей середину отрезка с началом координат.

Задача 6. Дана прямая  $2x+3y+4=0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2,1)$  параллельно данной прямой.

Задача 7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0 (1;-3)$  и составляющей угол  $30^\circ$  с осью абсцисс.

Задача 8. Даны последовательные вершины выпуклого четырехугольника  $A(-3;1)$ ,  $B(3;9)$ ,  $C(7;6)$ ,  $D(-2;-6)$ . Определить точку пересечения его диагоналей и угол между ними.

Аудиторная самостоятельная работа.

Задача 1. Даны уравнения сторон треугольника:  $x + *y - 11 = 0$ ,  $*x + y + 4 = 0$ ,  $3x - 5y - 7 = 0$ . Найти площадь треугольника.

Задача 2. Известны координаты вершин треугольника:  $A(*;2)$ ,  $B(5;-*)$ ,  $C(-*;4)$ . Найти уравнение медианы, проходящей через вершину С и её длину, уравнение высоты, проходящей через вершину В и площадь треугольника; уравнение средней линии параллельной стороне АС.

Задача 3. Дана прямая  $5x+*y - *=0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(*,-5)$ : а) параллельно данной прямой, б) перпендикулярно данной прямой.

Задача 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0 (*;-3)$  и составляющей угол  $45^\circ$  с прямой  $y = -3x + *$ .

Задача 5. Дан треугольник с вершинами  $A(-*;1)$ ,  $B(*;-1)$ ,  $C(*-2;3)$ . Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

Задача 6. Записать уравнение прямой  $5x+*y-8=0$  в отрезках. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и координатными осями

## Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

### **ПЗ № 7. Тема: Составление и исследование уравнений окружности и эллипса, гиперболы и параболы.**

Цели :

- рассмотреть различные виды кривых второго порядка;
- развивать умение решать геометрические задачи, связанные с преобразованием уравнений кривых на плоскости и нахождением характеристик кривых по заданному уравнению;
- воспитывать аккуратность в расчетах, умение владеть навыками работы с информацией.

Вопросы для обсуждения.

1. Виды кривых второго порядка. Теорема.
2. Парабола.
3. Гипербола.
4. Окружность.
5. Эллипс.

#### ***Образец решения типовой задачи***

Пример 1 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$4x^2+5y^2+20x-30y+10=0.$$

**Р е ш е н и е.** Так как  $AC=4\cdot 5=20>0$ , то можно предположить, что кривая есть эллипс. Выполним преобразования.

$$(4x^2+20x) + (5y^2-30y)+10=0.$$

$$4(x^2+5x) + 5(y^2-6y)+10=0.$$

$$4\left(x^2 + 2x\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 5(y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 - 3^2) + 10 = 0$$

$$4\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) + 5((y-3)^2 - 9) + 10 = 0$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 25 + 5(y-3)^2 - 45 + 10 = 0$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2 = 60$$

$$\frac{4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3)^2}{60} = \frac{60}{60}$$

$$\frac{4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{60} + \frac{5(y-3)^2}{60} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке с координатами  $\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$  и полуосями  $a = \sqrt{15}$  и  $b = \sqrt{12}$

Пример 2 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением  $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$

**Р е ш е н и е.** Указанное уравнение определяет параболу, т.к.  $C=0$ . Докажем это.

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0;$$

$$(x+5)^2 = 2y + 14;$$

$$(x+5)^2 = 2(y+7)$$

Получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке  $O_1(-5; -7)$  и  $p=1$ .

Пример 3 Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением  $4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$  ( $AC = -4 < 0$ )

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение:

$$4(x^2+2x+1)-(y^2+8y+16)-4+16-12=0;$$

$$4(x+1)^2-(y+4)^2=0;$$

$$(2(x+1)+(y+4))\cdot(2(x+1)-(y+4))=0;$$

$$(2x+y+6)\cdot(2x-y-2)=0.$$

Это уравнение определяет две пересекающиеся прямые  $2x+y+6=0$  и  $2x-y-2=0$ .

Решение задач.

Задача 1. Написать уравнение окружности с центром в точке  $C(2;-3)$  и радиусом равным 6.

Задача 2. Показать, что  $x^2+y^2+4x-6y-3=0$  есть уравнение окружности. Найти её центр и радиус.

Задача 3. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2+y^2+3x-7y-1,5=0$ .

Задача 4. Найти точки пересечения окружности  $(x-1)^2+(y-2)^2=4$  и прямой  $y=2x$ .

Задача 5. Найти уравнение окружности, касающейся оси  $Ox$  в начале координат и пересекающей ось  $Oy$  в точке  $A(0;10)$ .

Задача 6. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

а) полуоси его  $a=6$ ,  $b=4$ ;

б) расстояние между фокусами  $2c=10$ , а большая ось  $2a=16$ ;

в) малая полуось  $b=4$  и расстояние между фокусами  $2c=10$ ;

г) большая полуось  $a=12$ , а эксцентриситет  $\varepsilon=0,5$ ;

д) малая полуось  $b=8$ , а эксцентриситет  $\varepsilon=0,6$ ;

е) сумма полуосей  $a+b=12$ , а расстояние между фокусами  $2c = 6\sqrt{2}$ .

Задача 7. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $4x^2+9y^2=144$ .

Задача 8. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между её вершинами равно 20, расстояние между фокусами равно 30.

Задача 9. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет  $e=1,4$ .  
Найти уравнение гиперболы.

Задача 10. Гипербола проходит через точки  $\left(3; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$  и  $(-2\sqrt{5}; 3)$ . Найти уравнение гиперболы.

Задача 11. Найти уравнение асимптот гиперболы  $2x^2 - 3y^2 = 6$ .

Задача 12. Парабола  $y^2 = 2px$  проходит через точку  $A(2; 4)$ . Определите её параметр  $p$ .

Задача 13. Составить уравнение параболы, зная, что вершина её находится в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4, а осью симметрии служит ось  $Ox$ .

Аудиторная самостоятельная работа.

Задача 1. Написать уравнение окружности с центром в точке  $(-4; *)$  и радиусом, равным  $*$ .

Задача 2. Найти координаты центра и радиус окружности  $x^2 + y^2 - x + 2 \cdot * \cdot y - * = 0$ .

Задача 3. Найти уравнение окружности, касающейся оси  $Oy$  в начале координат и пересекающей ось  $Ox$  в точке  $(-*; 0)$ .

Задача 4. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $(2 \cdot *)^2 x^2 + (*)^2 y^2 = 100 \cdot *$ .

Задача 5. Дана гипербола  $\frac{x^2}{2 \cdot *} - \frac{y^2}{*} = 1$ . Найти уравнения её асимптот.

Задача 6. Найти эксцентриситет гиперболы  $* \cdot x^2 - 2 \cdot * \cdot y^2 = 100 \cdot *$ .

Задача 7. Уравнения асимптот гиперболы  $y = \frac{1}{*}x$  и  $y = -\frac{1}{*}x$ , а расстояние между фокусами  $2c = 10 + *$ . Найти уравнение гиперболы.

Задача 8. Парабола симметрична относительно оси  $Ox$ , проходит через точку  $A(*; -1)$ , а вершина её лежит в начале координат. Составить её уравнение.

Литература:

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3–е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2010. – 909 с.
2. Щипачев, В.С. Курс высшей математики: Учебное пособие для вузов / В.С. Щипачев. – М: Проспект, 2003. – 548 с.

### ПЗ № 8. Тема: Вычисление пределов функций.

Цель: - научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности вида  $\frac{0}{0}$   
 $\frac{\infty}{\infty}$   
 - научиться вычислять пределы, раскрывая неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

#### I. Теоретическая справка.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

1. Если функция  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая величина при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), то функция  $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  является бесконечно большой.
2. Если функция  $f(x)$  есть бесконечно большая величина при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), то функция  $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$  является бесконечно малой величиной при  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

#### Основные теоремы о пределах.

1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)$
3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)$
4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)$
5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делителя не равен нулю), т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)}$
6. Если  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ , то предел сложной функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = A$
7. Если в некоторой окрестности точки  $x_0$  (или при достаточно больших  $x$ )  $f(x) < g(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x)$

Правила раскрытия неопределенности  $\frac{0}{0}$ .

1. При раскрытии неопределенности  $\frac{0}{0}$ , если в числителе и знаменателе дроби многочлены, нужно разложить их на множители и сократить.

2. При раскрытии неопределенности  $\frac{0}{0}$ , если в числителе и (или) знаменателе дроби присутствует выражение с корнем, нужно помножить числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное к тому, где есть корень, избавиться от иррациональности в числителе и (или) знаменателе, сократить образовавшийся общий множитель.

3. Правило раскрытия неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$ : для раскрытия неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$  нужно числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень переменной, сократить, воспользоваться правилом связи между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.

Формулы сокращенного умножения.

$$(x + c)(x - c) = x^2 - c^2;$$

$$(x + c)(x^2 - xc + c^2) = x^3 + c^3;$$

$$(x - c)(x^2 + xc + c^2) = x^3 - c^3.$$

**II. Решение задач:**

Вычислите пределы

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 25x + 25}{x^2 + 15x - 30}$

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{\log_2(x^2 + 1)}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{4x - 8}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8x^3}{4x - 12}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x + 8}{2x^2 + 3x + 5}$

Раскрытие неопределенности  $\frac{0}{0}$  (случай, когда в числителе и знаменателе многочлены)

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x} = 2$

8.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{2 + x} = -4$

9.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^3 - 27} = -1\sqrt{27}$

10.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3} = 1,5$

11.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2} = -4\sqrt{3}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} = 1$

13.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = 2,4$

14.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^3 - 64} = -1\sqrt{6}$

15.  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{z^2 - a^2}{a^4 - z^4}$

Раскрытие неопределенности  $\frac{0}{0}$  (случай, когда в числителе и(или) знаменателе

присутствует выражение с корнем)

16.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{3 - x}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x-1}$

20.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x} - 3}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$

Вычислите пределы, где нужно воспользуйтесь правилом раскрытия

неопределенности  $\frac{\infty}{\infty}$  или  $\infty-\infty$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 6)$

23.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2)$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 3x}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8}{2x-2}$

28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2x}$

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 3}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2}{x^3 + 3x^2 - 1}$

31.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}$

32.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$

### III. Аудиторная самостоятельная работа.

1.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1,5} \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 5x + 3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x + 4}}{16 - x^2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{1}{x+3} - \frac{6}{9-x^2} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-9}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x - 2}}$

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$

### Контрольные вопросы

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется пределом числовой последовательности?
3. В чем состоит геометрический смысл предела числовой последовательности?
4. Какие числовые последовательности называются сходящимися, а какие расходящимися?
5. Что называется пределом функции в бесконечности?
6. Что называется пределом функции в точке?
7. Какая функция называется бесконечно малой величиной?
8. Связь бесконечно малых величин с пределами функций?
9. Свойства бесконечно малых величин?
10. Какая функция называется бесконечно большой величиной?
11. Свойства бесконечно больших величин?
12. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами?
13. Правило раскрытия неопределенности  $\frac{0}{0}$
14. Какая функция называется бесконечно большой величиной?
15. Каковы свойства бесконечно больших величин?

16. Какая функция называется бесконечно малой величиной?  
 17. Каковы свойства бесконечно малых величин?  
 18. В чем заключается связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами?  
 19. Как раскрывается неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ ?

### ПЗ № 9. Тема: Исследование функций на непрерывность.

**Цель:** научиться вычислять односторонние пределы, исследовать функцию на непрерывность, определять род точек разрыва.

#### III. Теоретическая справка.

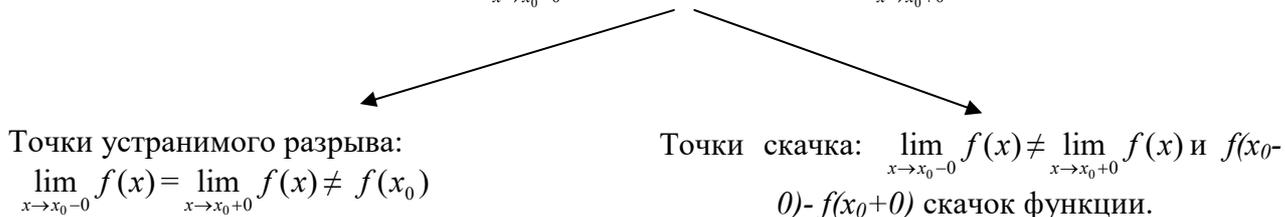
Определение 1. Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) определена в точке  $x_0$ , т.е. существует  $f(x_0)$ ;
- 2) имеет конечный предел функции при  $x \rightarrow x_0$ ;
- 3) этот предел равен значению функции в точке  $x_0$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Определение 2. Функция  $y=f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она определена в этой точке и бесконечно малому значению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ .

Точка  $x_0$  называется точкой разрыва функции  $f(x)$ , если эта функция в данной точке не является непрерывной.

К точкам разрыва I рода относятся точки, в которых существуют конечные односторонние пределы функции:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  - левый предел и  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  - правый предел.



К точкам разрыва II рода относятся точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

#### IV. Решение задач:

Вычислить односторонние пределы.

19.  $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{4}{(x-2)^3}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x+2}{x-1}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 5 \pm 0} \frac{3-x}{(x-5)^2}$

Исследовать на непрерывность функции

23.  $y = \frac{1}{x}$

24.  $y = \begin{cases} x+1, & \text{при } x \geq 0 \\ x-1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$

25.  $y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$

26.  $y = x^2$

27.  $y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

28.  $y = \frac{1}{x+3}$

$$29. \quad y = \begin{cases} 2 - x, & \text{при } x \leq 0 \\ \cos x, & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

#### IV. Аудиторная самостоятельная работа.

Исследовать на непрерывность функции

$$1. \quad y = 13^{\frac{1}{5+x}}$$

$$2. \quad y = 12^{\frac{1}{x}}$$

$$3. \quad y = 6^{\frac{1}{3-x}}$$

$$4. \quad y = \begin{cases} \cos x, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 - x, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

$$5. \quad y = \begin{cases} \cos x, & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{при } 0 < x < 2 \\ x, & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

$$6. \quad y = \frac{1}{2-x}$$

$$7. \quad y = \frac{1}{(x+5)^2}$$

$$8. \quad y = -\frac{2}{x^2-1}$$

$$9. \quad y = \frac{1}{4x-x^2-3}$$

$$10. \quad y = \frac{3}{2^x-1}$$

$$11. \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \leq 1 \\ x+1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

$$12. \quad y = \begin{cases} x, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

$$13. \quad y = \begin{cases} -x-1, & \text{при } x \leq -1 \\ 0, & \text{при } -1 < x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

$$14. \quad y = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{при } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{при } 1 < x < 2 \\ 4 - x^2, & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

$$15. \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{при } x < 0 \\ \sin x, & \text{при } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

#### **Контрольные вопросы**

1. Назовите основные условия непрерывности.
2. Как определить род точек разрыва?
3. Какая точка разрыва называется точкой разрыва первого рода?
4. Какая точка разрыва называется точкой разрыва второго рода?
5. Какой разрыв считают устранимым?

#### **ПЗ № 10-11. Тема: Дифференцирование функций.**

**Цель:** Научить дифференцировать функцию одной действительной переменной.

**Оборудование:** Рабочие тетради, ручки, вычислительная техника (калькулятор).

#### **Порядок работы:**

##### **I. Теоретическая справка.**

1111, 5711111, 111/11 0000

$$1. c' = 0, c = \text{const}$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$17. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$18. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

### III. Решение задач:

Найти производные функций

$$1. a) y = 2x + 8, \quad y = 3x^2 + x + 7, \quad y = 4\sqrt{x} + x^2 - 5,$$

$$2. \quad y = x^4 + \sqrt{x}, \quad y = 2x^4 + x^2 + \sqrt[3]{x} + 9, \quad y = 3 - 7x + 8x^3.$$

$$3. \quad y = (x-3)(x+5), \quad y = x^3(x - \sqrt{x}), \quad y = 3x(x^2 - \frac{3}{5}\sqrt{x}),$$

$$y = (x^3 - 2x + 1)(1 - 5x - 8x^2)$$

$$4. \quad y = \frac{3x-1}{5x+7}, \quad y = \frac{x^2-1}{3+5x}, \quad y = \frac{x^3}{x^2-4},$$

$$5. \quad y = \sin 2x, \quad y = \cos 3x, \quad y = \sin 2x - \cos 3x, \quad y = x \sin x, \quad y = \sin 3x \cos 5x,$$

$$y = \sin^2 x, \quad y = x \operatorname{ctg} x, \quad y = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg}^3 3x, \quad y = \sin^2 x - \cos^2 x, \quad y = \operatorname{tg}^3 3x + \operatorname{tg}(x+3)^3,$$

$$y = \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg} 2x.$$

$$6. \quad y = x^2 2^{8x+5x^2}, \quad y = (3x^2 - 1)e^{\frac{3}{x}}.$$

$$7. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$$

$$8. \quad y = \arcsin 7x$$

$$9. \quad y = \operatorname{arctg} 3x$$

$$10. \quad y = \arccos(4x-1)$$

$$11. \quad y = x^4 \arccos x$$

$$12. \quad y = \sin^2 3x$$

$$13. \quad y = \frac{\cos^3 \ln x}{2 \sin^2 2x}$$

$$14. \quad y = \sqrt{x} \operatorname{ctg} 3x + 2x^2$$

$$15. \quad y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}$$

Найти производные показательных и логарифмических функций.

$$16. \quad y = \lg x + x^3, y'(-1) - ?$$

$$17. \quad y = \ln^3 3x$$

$$18. \quad y = 3^{\ln x}$$

$$19. \quad y = e^{-x^2}$$

$$20. \quad y = x^2 2^{8x+5x^2}$$

$$21. \quad y = (3x^2 - 1)e^{\frac{3}{x}}$$

$$22. \quad y = (x^2 + 7) \ln x^5$$

$$23. \quad y = \frac{\ln x}{x^2 - 3x}$$

#### V. Аудиторная самостоятельная работа:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $y = \sin 2x$  | 2. $y = \cos 3x$   | 3. $y = \sin 2x - \cos 3x$                    |
| 4. $y = x \sin x$   | 5. $y = \sin 3x \cos 5x$                                 | 6. $y = \sin^2 x$                             |
| 7. $y = x \operatorname{ctg} x$                             | 8. $y = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg}^3 3x$  | 9. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$                  |
| 10. $y = \operatorname{tg}^3 3x + \operatorname{tg}(x+3)^3$ | 11. $y = \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg} 2x$   | 12. $y = \frac{\sin^2 \ln(x+2)}{2 \cos^3 2x}$ |
| 13. $y = \sin 2x$   | 14. $y = \cos 3x$  | 15. $y = \sin 2x - \cos 3x$                   |
| 16. $y = x \sin x$  | 17. $y = \sin 3x \cos 5x$                                | 18. $y = \sin^2 x$                            |
| 19. $y = x \operatorname{ctg} x$                            | 20. $y = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg}^3 3x$ | 21. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$                 |
| 22. $y = \operatorname{tg}^3 3x + \operatorname{tg}(x+3)^3$ | 23. $y = \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{tg} 2x$   | 24. $y = \frac{\sin^2 \ln(x+2)}{2 \cos^3 2x}$ |

#### IV. Контрольные вопросы.

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дать определение производной.
3. Правила дифференцирования.
4. Производная сложной функции.
5. Производная обратной функции.
6. Производная логарифмической и показательной функций.
7. Производная степенной функции.
8. Производные тригонометрических функций.
9. Как найти производные тригонометрических функций?
10. Как найти производные обратных тригонометрических функций?
11. Как найти производные показательных функций?
12. Как найти производные логарифмических функций?

#### ПЗ № 12. Тема: Выполнение приближенных вычислений с помощью дифференциала.

**Цель:** научиться вычислять производные и дифференциалы высших порядков, применять дифференциал для приближенных вычислений.

#### V. Теоретическая справка.

##### Дифференциал функции.

1) Если дана дифференцируемая функция  $y = f(x)$ , то её приращение  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ , где  $\alpha \rightarrow 0$ , когда  $\Delta x \rightarrow 0$ .

2) При  $\Delta x \rightarrow 0$  величина  $\alpha \cdot \Delta x$  есть бесконечно малая высшего порядка, чем  $\Delta x$ .

Определение. Дифференциалом функции  $y = f(x)$  называется произведение производной этой функции на приращение независимой переменной. Дифференциал функции обозначается символом  $dy$ , т.е.  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ .

Определение. Дифференциалом независимой переменной называется её приращение  $dx = \Delta x$ , поэтому можно сказать, что дифференциалом функции называется произведение её производной на дифференциал независимой переменной:  $dy = f'(x) \cdot dx$ , тогда  $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$ .

3) Так как величина  $\alpha \cdot \Delta x$  есть бесконечно малая высшего порядка, чем  $\Delta x$ , то разность  $\Delta y - dy$ , есть величина бесконечно малая высшего порядка, чем  $\Delta x$ .

- 4) Для вычисления дифференциала функции необходимо задать начальное значение независимой переменной и её приращение  $\Delta x$ .
- 5) Если  $\Delta x$  мало, а  $f'(x) \neq 0$ , то величина  $\alpha \cdot \Delta x$ , входящая в приращение функции, значительно меньше, чем дифференциал функции  $dy$ , причём тем меньше, чем меньше  $\Delta x$ .
- 6) Вычисление  $\Delta y$  приращения функции может быть с хорошим приближением заменено вычислением дифференциала функции  $dy$ , который вычислить значительно проще, так как для этого требуется только найти производную этой функции и умножить её на приращение независимой переменной  $\Delta y \approx dy$
- 7) Так как  $\Delta y \approx dy$ , учитывая что  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , следует  $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ , то есть  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ . По этой формуле находят приближенное значение функции в точке  $x + \Delta x$  близкой к  $x$ , то есть можно использовать дифференциал в приближенных вычислениях.
- 8) Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путём умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной  $dx$ .
- 9) Правила дифференцирования:  $d(cu) = cdu$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Дифференциал функции в приближенных вычислениях.

- 1)  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$
  - 2)  $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$
  - 3)  $\sin \Delta x \approx \Delta x$
  - 4)  $tg \Delta x \approx \Delta x$
1. При использовании этих формул нужно градусы переводить в радианы.  
2. Если градусная мера угла меньше  $3^\circ$ , то вычисления выполняются с точностью до четырех знаков.  
3. Если градусная мера угла меньше  $7^\circ$ , но больше  $3^\circ$ , то с точностью до трех знаков.  
4. Если градусная мера угла больше  $7^\circ$ , то используют общую формулу (1) или частные

(5,6)

$$5) \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

$$6) tg(x + \Delta x) \approx tg x + \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$$

$$7) \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\Delta x}{x}$$

$$8) \ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}$$

$$9) e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$$

Производные высших порядков

Вторая производная функции  $y = f(x)$  - это производная от производной первого порядка, обозначается одним из символов:  $y''$  (читается: игрек два штриха),  $f''(x)$  (читается: эф два штриха от икс),  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  (читается: дэ два игрек по дэ икс дважды).

Третья производная функции  $y = f(x)$  - это производная от производной второго порядка, обозначается одним из символов:  $y'''$ ,  $f'''(x)$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ,  $y^{(3)}$ .

Производная порядка  $n$  есть производная от производной порядка  $(n-1)$ , обозначается одним из символов:  $y^{(n)}$ ,  $f^{(n)}(x)$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$

Производная второго порядка для функции  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , заданной параметрически,

вычисляется по формуле:  $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ .

## VI. Решение задач:

16. Определить приращение  $\Delta y$  и дифференциал  $dy$  для функции  $y = x^3$  при переходе  $x$  от значения  $x=2$  к значению  $x_1=2,01$ .

Найти производные и дифференциалы второго порядка.

17.  $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$       18.  $y = x \cdot \ln(x+1)$       19.  $y = \sin^2 3x$

Найти производные второго порядка от функций, заданных неявно или параметрически.

20.  $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$       21.  $y^3 - 3y + 3x = 1$       22.  $x^2 + y^2 = 1$

Найти производные  $n$ -го порядка

23.  $y = 2^x$       24.  $y = \cos^2 x$       25.  $y = \ln x$

Вычислить приближенно, применяя понятие дифференциала.

26.  $\sqrt[4]{16,64}$       27.  $\text{tg} 46^\circ$       28.  $\lg 10,08$   
29.  $\frac{5}{0,9997}$       30.  $\sin 3^\circ$       31.  $\text{tg} 7^\circ$

## VI. Аудиторная самостоятельная работа.

1.  $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$       2.  $y = (2x+5)^3, y'''(0) - ?$ ,  $d^3 y - ?$       3.  $y = \frac{1}{x-1}, y''(2) - ?$ ,  
 $y''(1) - ?$ ,  $d^2 y - ?$        $d^2 y - ?$
4.  $y = \sin x, y^{(n)} - ?$       5.  $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}, y''(1) - ?$ ,  $d^2 y - ?$       6.  $y = e^{-x^2}, y^{IV} - ?$
7. Показать, что функция  $y = x^2 \cdot \ln x$  удовлетворяет уравнению  $xy'' - y' = 2x$
8. Показать, что функция  $y = e^x \cdot \sin 2x$  удовлетворяет уравнению  $y'' - 2y' + 5y = 0$
9. Показать, что функция  $y = 4e^{-2x} - 5e^x$  удовлетворяет уравнению  $xy''' - 3y' + 2y = 0$
10.  $\cos 29^\circ \approx ?$       11.  $\sqrt[4]{17} \approx ?$       12.  $\sin 31^\circ \approx ?$
13.  $\sqrt[3]{1,21} \approx ?$       14.  $\sqrt{9,02} \approx ?$       15.  $\ln 1,2 \approx ?$
16. Определить приращение  $\Delta y$  и дифференциал  $dy$  для функции  $y = 3x^2 + 5x - 4$  при переходе  $x$  от значения  $x=2$  к значению  $x_1=1,98$ .
17. Определить приращение  $\Delta y$  и дифференциал  $dy$  для функции  $y = 2x^3 - x^2 + 3$  при переходе  $x$  от значения  $x=3$  к значению  $x_1=3,001$ .

### Контрольные вопросы

13. Как записать производную второго, ...,  $n$ -го порядка?
14. Как найти производную второго, ...,  $n$ -го порядка?
15. Как записать дифференциал первого, второго, ...,  $n$ -го порядка?
16. Как найти дифференциал первого, второго, ...,  $n$ -го порядка?
17. Перечислите свойства дифференциала.
18. Как найти производную второго порядка для функции, заданной параметрически?
19. Как выполняются приближенные вычисления с помощью дифференциала?

**ПЗ № 13. Тема: Исследование функций с помощью производной.**

**ПЗ № 14. Тема: Исследование функций с помощью производной и построение графиков.**

**ПЗ № 15. Тема: Методы интегрирования. Интегрирование подстановкой.**

**Требования к уровню усвоения содержания темы.**

#### Знать:

1. Правило вычисления интегралов с помощью метода замены переменной.
2. Метод интегрирования по частям.

#### Уметь:

1. Вычислять интегралы с помощью метода замены переменной.
2. Интегрировать по частям.
3. Выбирать метод интегрирования и сводить интеграл к табличному.

### Методические указания по изучению темы.

1. Проработать теоретический материал лекции по теме и дополнительно [1]с.247-275, [12/1]с.193-220, разобрав приведенные примеры.
2. Выполнить внеаудиторную самостоятельную работу.

### Порядок работы:

#### I. Проверка теоретических знаний.

1. Работа по таблице интегралов .

#### Вариант 1

$\int x^n dx =$	=	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} =$	=	$\int \cos x dx =$	=
$\int A(kx + b)^n dx =$	=	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$	=	$\int A \cos(kx + b) dx =$	=

$\int A dx =$	=	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} =$	=	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$	=
$\int \frac{dx}{x} =$	=	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$	=	$\int \frac{dx}{\sin^2(kx + b)} =$	=
$\int \frac{dx}{kx + b} =$	=	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} =$	=	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$	=
<b>Вариант 2</b>					
$\int a^x dx =$	=	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx =$	=	$\int \frac{dx}{\cos^2(kx + b)} =$	=
$\int a^{kx+b} dx =$	=	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx =$	=	$\int tg x dx =$	=
$\int e^x dx =$	=	$\int \sin x dx =$	=	$\int tg(kx + b) dx =$	=
$\int e^{kx+b} dx =$	=	$\int A \sin(kx + b) dx =$	=	$\int ctg x dx =$	=
				$\int ctg(kx + b) dx =$	=

2. Дополните математические предложения.

а)  $\int f(x) dx = \dots$  - формула интегрирования подстановкой.

## II. Тренировочные упражнения.

Пример 1:

$$\int \frac{dx}{(1+2x)^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1 + 2x \\ dt = (1+2x)' dx = 2 dx \\ dx = \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{t^{-1}}{-2} + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+2x)} + C = -\frac{1}{2+4x} + C$$

Найдите, используя пример 1, следующие интегралы.

- |                                     |  |  |
|-------------------------------------|--|--|
| 1. $\int \frac{dx}{(8-3x)^4}$       | 2. $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$         | 3. $\int \frac{xdx}{11-5x^2}$            |
| 4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}$ | 5. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$ | 6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$ |

## III. Аудиторная самостоятельного решения.

<p><b>Вариант 1</b></p> <p>1. <math>\int \frac{dx}{(7x-11)^3}</math></p> <p>2. <math>\int \frac{3x-1}{x^2+4} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} dx}{\cos^2 x}</math></p>	<p><b>Вариант 2</b></p> <p>1. <math>\int (4+5x)^{99} dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{2+5x}{x^2+9} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt[4]{4\operatorname{tg} x + 2}}</math></p>	<p><b>Вариант 3</b></p> <p>1. <math>\int \frac{dx}{(4-5x)^9}</math></p> <p>2. <math>\int \frac{8+3x}{x^2-16} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{5 \sin x - 2}}</math></p>
<p><b>Вариант 4</b></p> <p>1. <math>\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 4x}}{1+16x^2} dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{5x-1}{x^2+25} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{\ln^3(7x+1)}{7x+1} dx</math></p>	<p><b>Вариант 5</b></p> <p>1. <math>\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}</math></p> <p>2. <math>\int \frac{7-13x}{x^2+4} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2} dx</math></p>	<p><b>Вариант 6</b></p> <p>1. <math>\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x}</math></p> <p>2. <math>\int \frac{0.5x-0.16}{x^2+64} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x} dx}{\sin^2 2x}</math></p>
<p><b>Вариант 7</b></p> <p>1. <math>\int \frac{\sqrt{\operatorname{arcsin} 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{4x+11}{x^2+16} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{e^x dx}{2e^x+7}</math></p>	<p><b>Вариант 8</b></p> <p>1. <math>\int e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{5-3x}{x^2+9} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{(8-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx</math></p>	<p><b>Вариант 9</b></p> <p>1. <math>\int \frac{3^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}</math></p> <p>2. <math>\int \frac{13-4x}{x^2+9} dx</math></p> <p>3. <math>\int x^2 6^{1-x^3} dx</math></p>
<p><b>Вариант 0</b></p> <p>1. <math>\int \frac{\sqrt{\operatorname{arccos} 2x+3}}{\sqrt{1-4x^2}} dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{10x+3}{x^2+81} dx</math></p> <p>3. <math>\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arccot} x}</math></p>		

#### IV. Контрольные вопросы:

1. Какие методы интегрирования вам известны?
2. В чем заключается метод интегрирования заменой переменной (подстановкой)?

**ПЗ № 16. Тема: Интегрирование по частям .**

**Требования к уровню усвоения содержания темы.**

Знать:

1. Метод интегрирования по частям.

Уметь:

1. Интегрировать по частям.
2. Выбирать метод интегрирования и сводить интеграл к табличному.

**Методические указания по изучению темы.**

3. Проработать теоретический материал лекции по теме и дополнительно [1]с.247-275, [12/1]с.193-220, разобрав приведенные примеры.
4. Выполнить внеаудиторную самостоятельную работу.

**Порядок работы:**

**V. Проверка теоретических знаний.**

Работа по таблице интегралов .

Вариант 1

$\int x^n dx =$	=	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} =$	=	$\int \cos x dx =$	=
$\int A(kx + b)^n dx =$	=	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} =$	=	$\int A \cos(kx + b) dx =$	=
$\int A dx =$	=	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} =$	=	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$	=
$\int \frac{dx}{x} =$	=	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$	=	$\int \frac{dx}{\sin^2(kx + b)} =$	=
$\int \frac{dx}{kx + b} =$	=	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} =$	=	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$	=

Вариант 2

$\int a^x dx =$	=	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx =$	=	$\int \frac{dx}{\cos^2(kx + b)} =$	=
$\int a^{kx+b} dx =$	=	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx =$	=	$\int \operatorname{tg} x dx =$	=
$\int e^x dx =$	=	$\int \sin x dx =$	=	$\int \operatorname{tg}(kx + b) dx =$	=

$\int e^{kx+b} dx =$	$=$	$\int A \sin(kx+b) dx =$	$=$	$\int ctg x dx =$	$=$
				$\int ctg(kx+b) dx =$	$=$

2. Дополните математические предложения.

$\int u dv = \dots$  - формула интегрирования по частям.

3. Распределите следующие интегралы:

$\int P(x) \ln x dx$ ,  $\int P(x) e^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  $\int P(x) \sin kx dx$ ,  
 $\int P(x) \cos kx dx$ ,  $\int P(x) \arccos x dx$ ,  $\int P(x) \arctg x dx$ ,  $\int P(x) \text{arcctg} x dx$   
, в два столбца так, чтобы в левом находились те, в которых  $P(x)$  принимают за  $u$ , а в правом – те, в которых  $P(x) dx$  есть  $dv$ .

$u = P(x)$	$dv = P(x)$

## VI. Тренировочные упражнения.

Пример 1:

$$\int (1-3x) \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = 1-3x \\ dv = \cos x dx \\ du = (1-3x)' dx = -3 dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = uv - \int v du = (1-3x) \sin x - \int \sin x \cdot (-3 dx) =$$

$$= (1-3x) \sin x + 3 \int \sin x dx = (1-3x) \sin x - 3 \cos x + C$$

Найдите, используя образец, следующие интегралы.

1.  $\int (x-7) \sin x dx$

2.  $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$

3.  $\int x^2 e^{4x} dx$

4.  $\int x \cdot \arctg x dx$

Найдите интеграл  $\int e^{2x} \cos x dx$ , используя следующий план.

$$\int e^{2x} \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = e^{2x} \\ dv = \cos x dx \\ du = \dots\dots\dots \\ v = \dots\dots\dots \end{array} \right| = e^{2x} \cdot \dots\dots\dots - 2 \int \dots\dots\dots =$$

$$= e^{2x} \cdot \dots\dots\dots - 2 \left. \begin{array}{l} u = \dots\dots\dots \\ dv = \dots\dots\dots \\ du = \dots\dots\dots \\ v = \dots\dots\dots \end{array} \right| =$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \cdot \dots\dots\dots - \dots \int \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \cdot \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \cdot \dots\dots\dots$$

$$\int e^{2x} \cos x dx =$$

**VII. Аудиторная самостоятельного решения.**

<p>Вариант 1</p> <p>1. <math>\int (x^2 + 2x) \cos 3x dx</math></p> <p>2. <math>\int (2x + 1) \cdot 3^x dx</math></p>	<p>Вариант 2</p> <p>1. <math>\int \arctg 3x dx</math></p> <p>2. <math>\int e^{3x} (x^2 + 1) dx</math></p>	<p>Вариант 3</p> <p>1. <math>\int \frac{\ln 4x}{\sqrt{x}} dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{x dx}{\cos^2 x}</math></p>
<p>Вариант 4</p> <p>1. <math>\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx</math></p> <p>2. <math>\int \arctg(x - 2) dx</math></p>	<p>Вариант 5</p> <p>1. <math>\int \sqrt{x} \ln x dx</math></p> <p>2. <math>\int e^{2x} \cos x dx</math></p>	<p>Вариант 6</p> <p>1. <math>\int (5x - 6) \sin 3x dx</math></p> <p>2. <math>\int x^2 \ln(x + 1) dx</math></p>
<p>Вариант 7</p> <p>1. <math>\int x \ln(x + 2) dx</math></p> <p>2. <math>\int 4^x \sin x dx</math></p>	<p>Вариант 8</p> <p>1. <math>\int \arctg x dx</math></p> <p>2. <math>\int (x^2 - 6x) e^{-x} dx</math></p>	<p>Вариант 9</p> <p>1. <math>\int \sqrt{x} \ln^2 x dx</math></p> <p>2. <math>\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx</math></p>
<p>Вариант 0</p> <p>1. <math>\int e^{-4x} \left( 3x - \frac{1}{2} \right) dx</math></p>		

$$2. \int 3^x(x+2)dx$$

### VIII. Контрольные вопросы:

1. Какие методы интегрирования вам известны?
2. Расскажите о методе интегрирования по частям.
3. В каких видах интегралов  $P(x)$  принимают за  $u$ ?
4. В каких видах интегралов  $P(x)dx$  принимают за  $dv$ ?

**ПЗ № 17. Тема: Вычисление определенных интегралов. Вычисление площадей плоских фигур.**

**ПЗ № 18. Тема: Вычисление интегралов приближенными методами. Вычисление объемов тел вращения.**

**ПЗ № 19. Тема: Выполнение операций над высказываниями, составление таблиц истинности. Применение законов логики.**

Цели:

- изучить принципы построения таблиц истинности для сложных выражений;
- способствовать развитию логического мышления;

**Необходимо знать:** основные понятия, формулы и правила алгебры логики

**Необходимо уметь:** применять основные формулы и правила алгебры логики

**Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение):** методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

**Компьютерные программы:** Компьютерные программы не используются

**Теория:** Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы

**Порядок выполнения задания, методические указания:** - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

**Дополнительные задания:** могут быть сформулированы по ходу занятия

**Содержание отчета:** отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

## Содержание работы:

### Основные понятия.

- 1 Логика – наука о законах и формах мышления
- 2 Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно
- 3 Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть
- 4 Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом
- 5 Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение
- 6 Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)
- 7 Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.
- 8 Алгебра логики – это наука об общих правилах и законах действий над логическими переменными и высказываниями.
- 9 Самой простой логической операцией является операция НЕ, по-другому ее часто называют отрицанием, дополнением или инверсией и обозначают NOT ( ). Если  $A$  – истинно, то  $\bar{A}$  – ложно и наоборот. Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента. Логическая операция НЕ является унарной, т.е. действие выполняется над одним операндом. Таблица истинности:

$A$	$\bar{A}$
0	1
1	0

- 10 Логическое И еще часто называют конъюнкцией, или логическим умножением, а ИЛИ – дизъюнкцией, или логическим сложением. Операция И

(обозначается «И», «and», «&»,  $A \cdot B$ ) имеет результат «истина» только в том случае, если оба ее операнда истинны. Таблица истинности  $F = A \wedge B$ :

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

11 Операция ИЛИ (обозначается «ИЛИ», «or»,  $A+B$ ,  $A \vee B$ ) называется дизъюнкцией или логическим сложением и дает «истину», если значение «истина» имеет хотя бы один из операндов. Разумеется, в случае, когда справедливы оба аргумента одновременно, результат по-прежнему истинный. Таблица истинности  $F = A \vee B$ :

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используется операции импликация и эквивалентность.

12 Логическое следование: импликация – связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) – следствием из этого условия. Результатом импликации является ЛОЖЬ только тогда, когда условие A истинно, а следствие B ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ ... , ТО ... Таблица истинности  $F = A \rightarrow B$ :

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

13 Логическая равнозначность: эквивалентность – определяет результат сравнения двух простых логических выражений A и B. Результатом эквивалентности является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности". Таблица истинности  $F = A \leftrightarrow B$ :

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

14 Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении: 1. инверсия  $\rightarrow$  2. Конъюнкция  $\rightarrow$  3. Дизъюнкция  $\rightarrow$  4. Импликация  $\rightarrow$  5. Эквивалентность

15 Для изменения указанного порядка выполнения операций используются круглые скобки.

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить сколь угодно сложное логическое выражение. В вычислительной технике также часто используются операции импликация и эквивалентность.

16 Штрих Шеффера,  $A|B$  или антиконъюнкция, по определению это отрицание конъюнкции  $F = A|B = \overline{A \wedge B}$ :

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

17 Стрелка Пирса,  $A \downarrow B$  или антидизъюнкция, по определению  $F = A \downarrow B = \overline{A \vee B}$ :

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

18 Сумма по модулю два,  $A \oplus B$  или антиэквивалентность, по определению  $F = A \oplus B = \overline{A \leftrightarrow B}$ .

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

19 Основные законы логики :  $A = A$  – закон тождества

$A \& \bar{A} = 0$  – закон непротиворечия

$A \vee \bar{A} = 1$  – закон исключенного третьего

$\bar{\bar{A}} = A$  – закон двойного отрицания

– Свойства констант:  $\bar{0} = 1$        $\bar{1} = 0$   
 $A \vee 0 = A$        $A \& 0 = 0$   
 $A \vee 1 = 1$        $A \& 1 = A$

– Законы идемпотентности:  $A \vee A = A$ ;  $A \& A = A$

– Законы коммутативности:  $A \vee B = B \vee A$ ;  $A \& B = B \& A$

– Законы ассоциативности:  $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ ;  $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$

- Законы дистрибутивности:  $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$ ;  
 $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$
- Законы поглощения:  $A \vee (A \& B) = A$ ;  $A \& (A \vee B) = A$
- Законы де Моргана:  $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$ ;  $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

**Задание**

1 Составить таблицу истинности сложного логического выражения

**Пример выполнения:**

**1 Исходные данные:**

$$F = A \vee \overline{B} \wedge C,$$

**Решение:**

1 Определим количество переменных – их 3, значит количество строк в таблице истинности =  $2^3 + 1 = 9$  (каждый операнд принимает одно из двух значений – 0 или 1)

2 Определим количество и порядок действий: 3 действия ( $\partial 1 = \overline{B}$ ,  $\partial 2 = \partial 1 \wedge C$  и  $\partial 3 = A \vee \partial 2$ ), значит количество столбцов = 3 (3 переменные) + 3 (3 действия) = 6

3 Составляем таблицу истинности, вписывая в соответствующие ячейки результаты действий, используя правила алгебры логики, например, если  $B = 1$ , то  $\overline{B} = 0$ ;  $\partial 1 = 1$ ,  $C = 1$ , то  $\partial 1 \wedge C = 1$  и т. д.

A	B	C	$\partial 1$	$\partial 2$	$\partial 3$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

## Задания к практической работе.

### Задание 1

1	$F = A \vee \bar{B} \vee (A \vee C)$	16	$F = A \leftrightarrow C \vee B \rightarrow A$
2	$F = A \rightarrow \bar{B} \vee C$	17	$F = A \leftrightarrow \bar{C} \vee B \rightarrow \bar{A}$
3	$F = B \vee (\bar{A} \leftrightarrow C)$	18	$F = (A \leftrightarrow C) \vee (B \rightarrow A)$
4	$F = \bar{B} \vee (A \leftrightarrow C)$	19	$F = A \leftrightarrow C \vee (B \rightarrow \bar{A})$
5	$F = A \wedge B \rightarrow \bar{B} \wedge C$	20	$F = A \leftrightarrow (C \vee B \rightarrow A)$
6	$F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$	21	$F = (\bar{A} \leftrightarrow C) \vee B \rightarrow A$
7	$F = (A \vee \bar{B}) \vee (\bar{A} \rightarrow C)$	22	$F = \bar{A} \leftrightarrow (C \vee \bar{B} \rightarrow A)$
8	$F = (A \rightarrow \bar{B}) \vee C$	23	$F = A \wedge (B \rightarrow \bar{C}) \wedge C$
9	$F = B \vee C \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{C}$	24	$F = A \wedge (B \leftrightarrow \bar{A}) \vee C$
10	$F = \bar{B} \vee (A \wedge C \rightarrow B)$	25	$F = (C \vee \bar{B}) \vee (\bar{A} \vee C)$
11	$F = A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C$	26	$F = A \rightarrow \bar{B} \vee (C \rightarrow \bar{B})$
12	$F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$	27	$F = (A \wedge B \rightarrow \bar{B}) \wedge (C \vee \bar{A})$
13	$F = A \rightarrow \bar{B} \vee (\bar{A} \vee C)$	28	$F = \bar{B} \vee (A \leftrightarrow C) \wedge C$
14	$F = \bar{A} \wedge B \rightarrow \bar{B} \vee C$	29	$F = A \wedge B \rightarrow \bar{B} \wedge C$
15	$F = B \vee (\bar{A} \leftrightarrow C) \wedge A$	30	$F = A \wedge B \leftrightarrow \bar{B} \vee C$

**Контрольные вопросы:** 1 Что такое логика? 2 Что называется высказыванием? 3 Что такое утверждение? 4 Что называется рассуждением? 5 Что такое умозаключение? 6 Что такое логическое выражение? 7 Какие бывают логические выражения? 8 Что такое алгебра логики? 9 Понятие, обозначение и таблица истинности инверсии. 10 Понятие, обозначение и таблица истинности конъюнкции. 11 Понятие и обозначение и таблица истинности дизъюнкции. 12 Понятие, обозначение и таблица истинности импликации. 13 Понятие, обозначение и таблица истинности эквивалентности. 14 Порядок действий в сложных логических выражениях. 15 Способ изменения порядка действий в логических выражениях. 16 Понятие, обозначение и таблица истинности штриха Шеффера. 17 Понятие, обозначение и таблица истинности стрелки Пирса. 18 Понятие, обозначение и таблица истинности суммы по модулю два. 19 Закон двойного отрицания. 20 Законы

### Литература:

- 1 Горбатов В. А. Дискретная математика: учебник для вузов / В. А. Горбатов, А. В. Горбатов, М. В. Горбатова. - М. : АСТ, 2003. - 447 с. : рис., табл. - (Высшая школа). - Библиогр.: с.441-444.
- 2 Новиков Ф. А. Дискретная математика: учебник для вузов / Ф. А. Новиков. - СПб : Питер, 2007. - 364 с.

**ПЗ № 20. Тема: Выполнение операций над событиями. Применение классического определения к вычислению вероятности.**

**ПЗ № 21. Тема: Вычисление вероятностей по теоремам сложения и умножения вероятностей.**

**ПЗ № 22. Тема: Вычисление вероятностей по формуле полной вероятности, формуле Байеса.**

---

**Цель работы:** вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы полной вероятности, формулы Байеса и Бернулли.

**Содержание работы:**

**Основные понятия.**

1 Формула полной вероятности: Вероятность события  $A$ , которое может произойти совместно с одной из гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу несовместных событий ( $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ ) равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез

на соответствующие им условные вероятности события  $A$ :  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$ .

2 Формула Байеса: Вероятность гипотезы при условии, что событие  $A$  произошло, равна произведению вероятности этой гипотезы на соответствующую ей условную вероятность события  $A$ , которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность события  $A$ .

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)}$$

3 Если производится  $n$  независимых опытов в каждом из которых событие  $A$  появляется с одинаковой вероятностью  $p$ , тогда вероятность того, что событие  $A$  появится ровно  $m$  раз определяется по формуле:  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ , где  $q = 1 - p$

**Пример выполнения:**

**исходные данные:**

1 Каждый из двух стрелков независимо друг от друга произвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым стрелком

**Решение:** Событие  $A$  – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы:

$H_1$  – ни один стрелок не попадет;

---

$H_2$  – первый стрелок попадет, второй – нет;

$H_3$  – второй стрелок попадет, первый – нет.

$H_4$  – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны:

$$P(H_1) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(H_2) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

$$P(H_3) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(H_4) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$$

Условные вероятности события  $A$  при этих гипотезах равны:

$$P\left(\frac{A}{H_1}\right) = 0; \quad P\left(\frac{A}{H_2}\right) = 1; \quad P\left(\frac{A}{H_3}\right) = 1; \quad P\left(\frac{A}{H_4}\right) = 0.$$

После опыта гипотезы  $H_1$  и  $H_4$  становятся невозможными, а вероятность гипотезы

$$H_2 \text{ будет равна } P\left(\frac{H_2}{A}\right) = \frac{P(H_2) \cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(H_3) \cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right) + P(H_4) \cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)} = \frac{0,28 \cdot 1}{0,28 + 0,18} \approx 0,61;$$

**Ответ:** вероятность того, что объект поражен первым стрелком, равна 0,61.

2 Для нормальной работы линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

**Решение:** Т.к. для нормальной работы надо 8 автобусов из 10, или 9 из 10, или 10, а вероятность выхода каждого автобуса  $p = 1 - q = 1 - 0,1 = 0,9$ . Вероятность нормальной работы – это сумма вероятностей:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= C_{10}^8 p^8 q^{10-8} + C_{10}^9 p^9 q^{10-9} + C_{10}^{10} p^{10} q^{10-10} = \\
 &= \frac{10!}{8!2!} (0,9)^8 (0,1)^2 + \frac{10!}{9!1!} (0,9)^9 (0,1) + \frac{10!}{10!0!} (0,9)^{10} (0,1)^0 \approx \\
 &\approx \frac{9 \cdot 10}{2} 0,43 \cdot 0,01 + 10 \cdot 0,39 \cdot 0,9 + 0,35 \approx \\
 &\approx 0,19 + 0,39 + 0,35 = 0,93
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $P(A) = 0,93$

---

**Задания к практической работе.**

1 В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе № 2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества

2 Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх не больше 3 раз.

3 Игральная кость бросается 20 раз. Определить вероятность того, что 3 очка выпадут 7 раз

4 В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При

первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

5 Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукции первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?

6 Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх ровно 3 раза

7 На склад поступает продукция 3-х фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятые изделия произведены на первой фабрике, если они оказались нестандартными

8 Авиакружок посещают 20 человек. Определить вероятность того, что в кружке 4 девушки, если вероятность заинтересованности девушек этим кружком равна 0,2.

9 В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без прицела – 0,7. Найти вероятность того, что

мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

10 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 10 случайно отобранных семян взойдет не менее 8.

11 По самолету производится 3 выстрела с вероятностями попадания 0,5; 0,6; 0,8. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

12 В институте 40% юношей - брюнеты, 35% - блондины, 25% - рыжие. Вероятность, что студентке Красавиной понравится брюнет, равна 0,7, блондин - 0,8, рыжий - 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент понравится Красавиной

13 В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что число заключенных договоров после 10 визитов составит 3.

14 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу микросхема окажется бракованной?

15 В первом контейнере находится 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Во втором находится 50 деталей, из которых 30 бракованных. В третьем контейнере - 50 деталей, среди которых 40 бракованных. Из случайно выбранного контейнера извлекается одна деталь, которая оказалась качественной. Определить вероятность того, что деталь была извлечена из первого контейнера

16 Страховая компания заключила 10 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2 %. Найти вероятность того, что таких случаев будет 2

17 Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

18 Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковых машин эта вероятность равна 0,2.

К бензоколонке подъехала машина для заправки. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

19 Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее 3?

20 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой урны.

21 При разрыве снаряда образуются 10% крупных осколков, 60% средних и 30% мелких. Вероятность пробивания брони крупным осколком – 0,7, средним – 0,2 и мелким – 0,05. Известно, что в броню попал осколок. Найти вероятность того, что броня пробита

22 Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно

---

23 На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20, с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и 5 % продукции этих предприятий, соответственно имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет дефектна.

24 Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет  $p=0,75$ . Найти вероятность того, что при 10 посещениях клиент совершит покупку ровно 8 раз

25 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из второй урны.

26 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдет 70.

27 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена вторым поставщиком?

28 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда - с вероятностью 0,7; если три снаряда - с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

27 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена вторым поставщиком?

28 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда - с вероятностью 0,7; если три снаряда - с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

**Порядок выполнения задания, методические указания:** - ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод

**Дополнительные задания:** Могут быть сформулированы по ходу занятия

**Содержание отчета:** отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

**Контрольные вопросы:** 1 .

**Литература:**

<http://cyberfac.ru>

<http://www.matburo.ru>

<http://www.toehelp.ru>

**ПЗ № 23. Тема: Составление закона распределения дискретной случайной величины. Вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин.**

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины  $x$  называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

**Свойства математического ожидания:**

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(Cx) = C * M(x)$$

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

**Дисперсией** случайной величины  $x$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \text{ или } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

**Среднеквадратическое отклонение:**  $\sigma = \sqrt{D(x)}$

**Свойства дисперсии:**

- дисперсия постоянной равно нулю:

$$D(C) = 0$$

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(Cx) = C^2 * D(x)$$

дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

**Свойства среднеквадратического отклонения:**

$$\sigma(C) = 0$$

$$\sigma(Cx) = |C| * \sigma(x)$$

**Пример 1.** Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти  $p(x < 2)$ ,  $p(x > 4)$ ,  $p(2 \leq x \leq 4)$ , математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

$x_i$					
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

**Решение.**  $p(x < 2) = 0,1;$

$$p(x > 4) = 0,1;$$

$$p(2 \leq x \leq 4) = 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,8;$$

$$M(x) = 1 * 0,1 + 2 * 0,2 + 3 * 0,4 + 4 * 0,2 + 5 * 0,1 = 3;$$

$$D(x) = 1^2 * 0,1 + 2^2 * 0,2 + 3^2 * 0,4 + 4^2 * 0,2 + 5^2 * 0,1 - 3^2 = 1,2$$

$$\sigma(x) = \sqrt{12} = 1,095$$

**Пример 2.** Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2		-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

**Решение.**  $x$  – случайная, прибыль от продажи 10 яиц.

$$M(x) = 0,6 * 0,2 + 0,4 * 0,5 + 0,2 * 0,2 + 0 * 0,06 - 0,2 * 0,04 = 0,352$$

$$M(10000x) = 10000 * 0,352 = 3520 \text{ \$}$$

$$D(x) = 0,6^2 * 0,2 + 0,4^2 * 0,5 + 0,2^2 * 0,2 + 0^2 * 0,06 + (-0,2)^2 * 0,04 - 0,352^2 = 0,037696$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,037696} = 0,194154578$$

$$D(10000x) = 10000^2 * D(x) = 19415457,76$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,194154578} = 0,441$$

**Указания к выполнению практической работы:** для решения задач использовать данные таблицы №2. Данные своей задачи взять из таблицы по номеру, соответствующему порядковому номеру в учебном журнале. Работу оформить в отдельных тетрадях для практических работ. При необходимости использовать литературу из приведенного ниже списка.

### Основные понятия и определения.

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины  $x$  называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

### Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(Cx) = C * M(x)$$

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \dots * M(x_n)$$

**Дисперсией** случайной величины  $x$  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) \text{ или } D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

**Среднеквадратическое отклонение:**  $\sigma = \sqrt{D(x)}$

### Свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равно нулю:

$$D(C) = 0$$

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(Cx) = C^2 * D(x)$$

- дисперсия суммы (разности) случайных величин равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n D(x_i)$$

**Свойства среднеквадратического отклонения:**

-  $\sigma(C) = 0$

-  $\sigma(Cx) = |C| \cdot \sigma(x)$

**Пример 1.** Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти  $p(x < 2)$ ,  $p(x > 4)$ ,  $p(2 \leq x \leq 4)$ , математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

$x_i$					
$p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

**Решение.**  $p(x < 2) = 0,1$ ;

$p(x > 4) = 0,1$ ;

$p(2 \leq x \leq 4) = 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,8$ ;

$M(x) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 = 3$ ;

$D(x) = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,1 - 3^2 = 1,2$

$\sigma(x) = \sqrt{1,2} = 1,095$

**Пример 2.** Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2		-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

**Решение.**  $x$  – случайная, прибыль от продажи 10 яиц.

$M(x) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,06 - 0,2 \cdot 0,04 = 0,352$

$M(10000x) = 10000 \cdot 0,352 = 3520$  \$

$D(x) = 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,5 + 0,2^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,06 + (-0,2)^2 \cdot 0,04 - 0,352^2 = 0,037696$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.037696} = 0.194154578$$

$$D(10000x) = 10000^2 * D(x) = 19415457.76$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.194154578} = 0.441$$

**Указания к выполнению практической работы:** для решения задач использовать данные таблицы №2. Данные своей задачи взять из таблицы по номеру, соответствующему порядковому номеру в учебном журнале. Работу оформить в отдельных тетрадях для практических работ. При необходимости использовать литературу из приведенного ниже списка.

Задания:

1. Случайная величина  $X$  задана рядом распределения:

$x_i$	-1		
$p_i$	$p_2$	$p_1$	

Найти  $P\{X < 0\}$ ,  $P\{X > -1\}$ ,  $P\{-1 < X < 1\}$ . Найти  $MX$ ,  $DX$ .

2. Построить таблицу распределения и найти  $MY$ ,  $DY$  для случайной величины  $Y = 2X + 3$  ( $X$  задана в предыдущей задаче).

**ПЗ № 24. Тема: Построение вариационных рядов, графиков эмпирического распределения. Вычисление эмпирических числовых характеристик.**

Построив вариационный ряд и изобразив его графически, можно получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в ряду наблюдений. Для дальнейшего изучения изменения значений признака используются числовые характеристики вариационного ряда. Основные характеристики вариационного ряда можно разбить на три группы:

- 1) **показатели центра распределения**,
- 2) **показатели вариации**,
- 3) **показатели формы распределения**.

*Показатели центра распределения*

Характеристиками центра распределения данных вариационного ряда являются **средняя арифметическая, медиана и мода**.

Средней арифметической  $\bar{x}$  наблюдаемых значений признака называется

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

частное от деления суммы всех этих значений на их число, т.е. (Вычисленная по этой формуле средняя арифметическая называется **простой**).

Если данные наблюдений представлены в виде дискретного

$$\frac{\sum_{i=1}^v x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^v m_i}$$

вариационного ряда, то  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^v m_i}$  или  $\bar{x} = \sum_{i=1}^v x_i \cdot d_i$ . (В этих случаях средняя арифметическая называется **взвешенной**.)

Для определения среднего значения признака интервального вариационного ряда необходимо его условно заменить дискретным, а затем воспользоваться формулой средней арифметической взвешенной. Понятно, что в случае неравномерного распределения значений признака внутри частичных интервалов, полученное значение средней арифметической может отличаться от рассчитанного по несгруппированным данным.

**Медиана** ( $Me$ ) – значение признака в середине вариационного ряда.

Для определения медианы дискретного вариационного ряда вначале

$$№_{Me} = \frac{n+1}{2}$$

необходимо найти её позицию по формуле. Этой позиции и соответствует значение медианы. Оно может быть вариантом ряда или промежуточным значением между двумя соседними вариантами.

Для расчёта медианы интервального вариационного ряда вначале определяется медианный интервал: 1) просматриваются накопленные частоты, 2) первая из накопленных частот, превышающая половину всего объёма изучаемой совокупности, соответствует медианному интервалу. Далее значение медианы вычисляется по формуле:

$$Me = a_{Me} + h_{Me} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^v m_i - S}{m_{Me}}$$

где  $h_{Me}$  – длина медианного интервала;

$a_{Me}$  – нижняя граница медианного интервала;

$m_{Me}$  - частота медианного интервала;

$S$  – накопленная частота интервала, предшествующего медианному.

**Мода** ( $M_o$ ) – значение признака, наиболее часто встречающееся в вариационном ряду.

Мода дискретного вариационного ряда соответствует варианту с наибольшей частотой.

Для определения моды интервального вариационного ряда вначале устанавливается модальный интервал: если рассматривается интервальный вариационный ряд с равными интервалами, то модальный интервал определяется по наибольшей частоте; если рассматривается интервальный вариационный ряд с неравными интервалами, то модальный интервал определяется по наибольшей плотности распределения. Далее мода рассчитывается по формуле:

$$M_o = \alpha_{M_o} + h \cdot \frac{m_{M_o} - m_{M_o-1}}{(m_{M_o} - m_{M_o-1}) + (m_{M_o} - m_{M_o+1})},$$

где  $h_{M_o}$  - длина модального интервала;

$\alpha_{M_o}$  - нижняя граница модального интервала;

$m_{M_o}$ ,  $m_{M_o-1}$ ,  $m_{M_o+1}$  - частота модального интервала, частота интервала, предшествующего модальному, и частота интервала, следующего за модальным.

Средняя арифметическая имеет существенные преимущества перед другими мерами центральной тенденции, т.к. основывается на информации, содержащей все значения вариационного ряда. Однако, она весьма чувствительна к крайним значениям ряда. Поэтому, если необходимо предотвратить влияние нескольких наблюдений, расположенных далеко от центра распределения, то следует использовать медиану. Мода отдаётся предпочтение при изучении цен на рынке, спроса населения на некоторые продукты питания, одежду и обувь определённых размеров.

*Пример 8.* По данным примера 3 определить меры центральной тенденции.

Для дискретного вариационного ряда среднее значение признака вычисляется по формуле средней арифметической взвешенной, т.е.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 4 + 2 + 1} = 3,6 \quad \text{или}$$

$$\bar{x} = 0 \cdot \frac{1}{23} + 1 \cdot \frac{2}{23} + 2 \cdot \frac{3}{23} + 3 \cdot \frac{4}{23} + 4 \cdot \frac{6}{23} + 5 \cdot \frac{4}{23} + 6 \cdot \frac{2}{23} + 7 \cdot \frac{1}{23} = 3,6$$

В среднем банк *N* выдавал в день по 3,6 ипотечных кредита.

Позиция медианы данного вариационного ряда соответствует 12 значению признака в ранжированном ряду

( $N_{Me} = \frac{23 + 1}{2} = 12$ ). Таким образом,  $Me = 4$  (смотри пример 2). Это значит, что срединное значение количества ипотечных кредитов, выданных в день банком *N*, равно 4.

Мода дискретного вариационного ряда определяется по варианту с наибольшей частотой. Следовательно,  $Mo = 4$ . Наиболее часто банк *N* выдавал в день по 4 ипотечных кредита.

*Пример 9.* По данным примера 4 определить меры центральной тенденции.

Для определения среднего значения признака интервального вариационного ряда сначала необходимо условно заменить его дискретным (смотри пример 6). Далее можно использовать формулу средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{150 \cdot 3 + 250 \cdot 5 + 350 \cdot 9 + 450 \cdot 14 + 550 \cdot 8 + 650 \cdot 3}{3 + 5 + 9 + 14 + 8 + 3} = 398,8$$

В период распродажи по сниженным ценам средняя сумма дневной выручки в магазине детских товаров составила 398,8 д.е.

Вычисление медианы интервального вариационного ряда начинается с установления медианного интервала. Сумма всех частот равна 42. Первая из накопленных частот, превышающая половину объема изучаемой совокупности, соответствует интервалу от 400 до 500 д.е. (смотри

$$Me = 400 + 100 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 42 - 17}{14} = 428,6$$

пример 5). Следовательно, . Срединное значение суммы дневной выручки в магазине детских товаров в период распродажи составило 428,6 д.е.

Для определения моды интервального вариационного ряда вначале выбирается модальный интервал. Так как рассматривается интервальный вариационный ряд с равными интервалами, то модальный интервал устанавливается по наибольшей частоте. Наибольшая частота, равная 14,

соответствует интервалу от 400 до 500 д.е. Значение моды

$$Mo = 400 + 100 \cdot \frac{14 - 9}{(14 - 9) + (14 - 8)} = 445,5$$

составляет . Наиболее часто встречающаяся сумма дневной выручки магазина детских товаров в период распродажи - 445,5 д.е.

### Показатели вариации

В статистике используется ряд мер вариабельности (колеблемости).

**Размах вариации** – разность между наибольшим и наименьшим

вариантами  $R = x_{\max} - x_{\min}$  .

Размах вариации – показатель разброса значений признака в наборе данных. Однако больший интерес представляют показатели рассеяния наблюдаемых значений признака вокруг средней арифметической.

**Средним линейным отклонением** вариационного ряда называется средняя арифметическая абсолютных величин отклонений наблюдаемых

значений признака от их средней арифметической  $\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$  . Если данные наблюдений представлены в виде дискретного вариационного

ряда, то  $\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| m_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$  .

**Дисперсией** вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от средней

арифметической  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$  . Если же данные наблюдений представлены в виде дискретного вариационного ряда, то  $\sigma^2 =$

$$\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$$

. Именно этот показатель чаще всего используется для характеристики рассеяния наблюдаемых значений признака вокруг средней арифметической. Вместе с тем дисперсия обладает одним существенным недостатком: выражается в квадратных единицах. Поэтому применяется ещё один показатель – **среднее квадратическое**

**отклонение**, который определяется как арифметический квадратный корень из дисперсии  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  и имеет ту же размерность, что и изучаемый признак. Среднее квадратическое отклонение превышает среднее линейное отклонение в соответствии со свойством мажорантности средних.

Рассмотренные показатели являются абсолютными мерами рассеяния вариантов ряда. В некоторых случаях используются и относительные меры рассеяния, например, **коэффициент вариации**. Он представляет собой отношение среднего квадратического отклонения к средней арифметической:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Чем меньше коэффициент вариации, тем однороднее совокупность, тем точнее средняя отражает значения изучаемого признака.

*Пример 10.* По данным примера 3 рассчитать показатели вариации.

Размах вариации  $R = 7 - 0 = 7$  (ипотечных кредитов).

Среднее линейное отклонение составило

$$\bar{i} = \frac{|0-3,6| \cdot 1 + |1-3,6| \cdot 2 + |2-3,6| \cdot 3 + |3-3,6| \cdot 4 + |4-3,6| \cdot 6 + |5-3,6| \cdot 4 + |6-3,6| \cdot 2 + |7-3,6| \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 1,4 \text{ (ед.)}.$$

Дисперсия равна

$$\sigma^2 = \frac{(0-3,6)^2 \cdot 1 + (1-3,6)^2 \cdot 2 + (2-3,6)^2 \cdot 3 + (3-3,6)^2 \cdot 4 + (4-3,6)^2 \cdot 6 + (5-3,6)^2 \cdot 4 + (6-3,6)^2 \cdot 2 + (7-3,6)^2 \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 2,9 \text{ (ед.)}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение -  $\sigma = \sqrt{2,9} = 1,7 \text{ (ед.)}$ .

$$V = \frac{1,7}{3,6} \cdot 100\% = 47,2\%$$

Наконец, коэффициент вариации -

Видно, что индивидуальные значения признака отличаются в среднем от среднего арифметического на 1,7 кредита, или на 47,2 %. Полученные значения показателей вариации позволяют сделать вывод о значительной вариации количества выданных ипотечных кредитов банком N в рабочие дни месяца.

### Показатели формы распределения

Под **формой статистического распределения** понимается форма графика вариационного ряда – полигона или гистограммы. Формы графиков могут быть разнообразными. Прежде всего, они делятся на симметричные и несимметричные (асимметричные). Распределение называется **симметричным**, если частоты любых вариантов, равностоящих от среднего, равны между собой. При изучении экономических явлений чаще встречаются асимметричные распределения.

**Умеренно асимметричными** называются распределения, в которых частоты, находящиеся по одну сторону от наибольшей, больше (или меньше) частот, находящихся по другую сторону от наибольшей на том же расстоянии. Асимметрия может быть левосторонняя и правосторонняя. **При левосторонней асимметрии** частоты сначала медленно возрастают, а затем очень быстро убывают. **При правосторонней** – наоборот.

Для характеристики асимметрии применяются разные показатели. Наиболее распространённым является показатель, основанный на

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

определении центрального момента третьего порядка

В симметричных вариационных рядах  $\mu_3$  равен 0, при  $\mu_3 < 0$  имеет место левосторонняя асимметрия, при  $\mu_3 > 0$  – правосторонняя. Нормированный момент третьего порядка называется **коэффициентом**

**асимметрии**  $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ . Асимметрия считается существенной, если  $As$  по модулю больше 0,5.

Графики вариационных рядов могут быть **низковершинными** и **высоковершинными**. Имеется в виду выпад вершины эмпирического распределения вниз или вверх от вершины кривой нормального распределения.

Показатели эксцесса рассчитываются для симметричных распределений. Наибольшее распространение имеет **коэффициент эксцесса**  $Ex =$

$\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ , где  $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$  - нормированный момент четвёртого порядка. Для

нормального распределения  $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$ , следовательно, при  $Ex = 0$  распределение нормальное, при  $Ex < 0$  - низкововершинное, при  $Ex > 0$  - высоковершинное.

*Пример 11.* По данным примера 3 вычислить показатели формы распределения.

Как видно на рисунке 1 распределение рабочих дней месяца по количеству выданных ипотечных кредитов несимметрично. О существенности асимметрии позволяет судить значение коэффициента асимметрии. Для его определения сначала вычисляется центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = \frac{(0-3,6)^3 \cdot 1 + (1-3,6)^3 \cdot 2 + (2-3,6)^3 \cdot 3 + (3-3,6)^3 \cdot 4 + (4-3,6)^3 \cdot 6 + (5-3,6)^3 \cdot 4 + (6-3,6)^3 \cdot 2 + (7-3,6)^3 \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} + \frac{(5-3,6)^3 \cdot 4 + (6-3,6)^3 \cdot 2 + (7-3,6)^3 \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = -0,724$$

$$As = \frac{-0,724}{4,938} = -0,147$$

Коэффициент асимметрии - . Следовательно, в данном ряду распределения асимметрия левосторонняя, несущественная.

Можно рассчитать коэффициент эксцесса. В первую очередь определяется центральный момент четвёртого порядка:

$$\mu_4 = \frac{(0-3,6)^4 \cdot 1 + (1-3,6)^4 \cdot 2 + (2-3,6)^4 \cdot 3 + (3-3,6)^4 \cdot 4 + (4-3,6)^4 \cdot 6 + (5-3,6)^4 \cdot 4 + (6-3,6)^4 \cdot 2 + (7-3,6)^4 \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} + \frac{(5-3,6)^4 \cdot 4 + (6-3,6)^4 \cdot 2 + (7-3,6)^4 \cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 21,524$$

$$Ex = \frac{21,524}{8,41} - 3 = -0,44$$

Далее вычисляется коэффициент эксцесса - . Таким образом, изучаемое распределение низкововершинное.

## ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ

По данным задач 1 и 2 требуется:

- 1) Построить вариационный ряд и изобразить его графически.
- 2) Определить меры центральной тенденции.
- 3) Рассчитать показатели вариации и прокомментировать полученные значения.
- 4) Вычислить показатели асимметрии и эксцесса и сделать вывод о форме распределения.

### Задача 1.

Вариант 0.

В отделе дамской обуви универмага в течение дня были проданы туфли следующих размеров: 37, 35, 36, 37, 38, 37, 36, 37, 39, 38, 37, 36, 37, 37, 36.

Вариант 1.

На телефонной станции в течение часа проводились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Были получены следующие результаты: 3, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 4, 0, 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1, 4, 3, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 3, 2, 7, 2, 0, 0, 1, 3, 3, 1, 2, 4, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 5, 2, 3.

Вариант 2.

Администрацию универсама интересуют среднемесячные объёмы покупок товаров, которые не являются предметом ежедневного потребления. В течение января менеджер универсама регистрировал частоту покупок 100-граммовых пакетов с содой и собрал следующие данные: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8.

Вариант 3.

Наблюдения за числом изготовленных в течение смены деталей рабочими цеха дали следующие результаты: 21, 23, 20, 24, 24, 25, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 24, 25, 22, 23, 24, 24, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 25, 23, 24.

Вариант 4.

Чтобы выяснить, какие суммы (руб.) тратят студенты второго курса в течение дня, питаясь в кафе университета, проведён опрос 27 случайно отобранных студентов. Были получены следующие результаты: 16, 12, 15, 15, 23, 9, 15, 13, 14, 14, 21, 15, 14, 17, 27, 15, 16, 12, 16, 19, 14, 16, 17, 13, 14, 14, 19.

Вариант 5.

В отделе мужской обуви универмага в течение дня были проданы ботинки следующих размеров: 39, 38, 40, 41, 41, 42, 39, 43, 42, 40, 40, 41, 42, 41, 42, 41, 43.

Вариант 6.

Тарифные разряды рабочих цеха: 4, 3, 6, 4, 4, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 2, 3, 4, 4, 5, 2, 3, 6, 5, 4, 2, 4, 3.

Вариант 7.

Имеются следующие данные о размере семьи работников цеха (число человек в семье): 3, 4, 5, 2, 3, 6, 4, 2, 5, 3, 4, 2, 7, 3, 3, 6, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 4.

Вариант 8.

Тарифные разряды рабочих цеха: 4, 5, 6, 4, 4, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 3, 6, 5, 4, 6, 4, 3.

Вариант 9.

Дневная производительность труда рабочих бригады, выполняющих одинаковую операцию по обработке детали № 408, следующая (шт.): 19, 18, 20, 20, 21, 22, 21, 19, 23, 22, 22, 20, 21, 20, 23, 21, 20, 21, 20, 19.

### Задача 2.

Для оценки качества выпускаемых изделий измеряли диаметр валиков после шлифовки. Были получены следующие результаты (мм)\*\*

6,75 6,77 6,77 6,73 6,76 6,74	6,70 6,75 6,71 6,72 6,77 6,79 6,71 6,78
6,73 6,70 6,73 6,77 6,75 6,74	6,71 6,70 6,78 6,76 6,81 6,69 6,80 6,80
6,77 6,68 6,74 6,70 6,70 6,74	6,77 6,83 6,76 6,76 6,82 6,77 6,71 6,74
6,77 6,75 6,74 6,75 6,77 6,72+0,01N	6,74 6,80 6,75 6,80 6,72 6,78 6,70 6,75
6,78 6,78 6,76 6,77 6,74 6,74	6,77 6,73 6,74 6,77 6,74 6,75 6,74 6,76
6,76 6,74 6,74 6,74 6,74 6,76	6,74 6,72 6,80 6,76 6,78 6,73 6,70 6,76
6,76 6,77 6,75 6,78 6,72 6,76	6,78 6,68 6,75 6,73 6,82 6,73 6,80 6,81
6,71 6,82 6,77 6,80 6,80 6,70	6,70 6,82 6,72 6,69 6,73 6,76 6,74 6,77
6,72 6,76 6,78 6,78 6,73 6,76	6,80 6,76 6,72 6,76 6,76 6,70 6,73 6,75
6,77 6,77 6,70 6,81 6,74 6,73	6,77 6,74 6,78 6,69 6,74 6,71 6,76 6,76
6,77 6,70 6,81 6,74 6,74 6,77	6,75 6,80 6,74 6,76 6,77 6,77 6,81 6,75
6,78 6,73 6,76 6,76 6,76 6,77	6,76 6,80 6,77 6,74 6,77 6,72 6,75 6,76
6,77 6,81 6,76 6,76 6,76 6,80	6,74 6,80 6,74 6,73 6,75 6,77 6,74 6,76
6,77 6,77 6,75 6,76 6,74 6,82	6,76 6,73 6,74 6,75 6,76 6,72 6,78 6,72
6,76 6,77 6,75 6,78	

\*\*N – номер варианта

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аскеров, П.Ф. Общая и прикладная статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по направлению "Статистика" и другим экономическим специальностям / П.Ф. Аскеров, Р.Н. Пахунова, А.В. Пахунов. - Москва: ИНФРА-М, 2014. - 272 с.
2. Ефимова, М.Р. Общая теория статистики: учеб. для вузов по специальностям: финансовый менеджмент, бухгалт. учёт и аудит, междунар. экон. отношения / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2009. - 416 с.
3. Общая теория статистики: учебник для вузов / под ред. М.Г. Назарова. - Москва: Омега-Л, 2010. - 410 с.
4. Статистика: учебник для бакалавров / под общ. ред. Л. И. Ниворожкиной. - Москва: Дашков и К, 2011. - 415 с.
5. Общая теория статистики: методическое пособие по выполнению практических работ. Часть I / сост.: Н.А. Никитина. - Вологда: ВоГТУ, 2009. - 63 с.
6. Годин, А.М. Статистика [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров / А.М. Годин. - 11-е изд., перераб. и испр. - Москва: Дашков и Ко, 2014. - 412 с. Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=253808>.
7. Гусаров, В.М. Статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М. Гусаров, Е.И. Кузнецова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юнити-Дана, 2012. - 480 с. Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117190>.
8. Никифорова, Н.Г. Статистика: теория и практика в Excel [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Г. Никифорова, В.С. Лялин, И.Г. Зверева. - Москва: Финансы и статистика, 2010. - 448 с. Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=78916>.
9. Улитина, Е.В. Статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.В. Улитина, О.В. Леднева, О.Л. Жирнова; под ред. Е.В. Улитиной. - 3-е изд., стер. - Москва: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. - 320 с. Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=252966>.
10. Шелобаева, И.С. Статистика [Электронный ресурс]: практикум: учебное пособие / И.С. Шелобаева, С.И. Шелобаев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юнити-Дана, 2012. - 208 с. Режим доступа:  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=119522>.

## 2.2. Тестовые задания (ТЗ)

### ТЗ № 3.1 Тема: Множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется:

- а) пустым +
- б) конечным
- в) нулевым

2. Число всех подмножеств множества  $K=\{7,9,11,13,15,17,19\}$  равно:

- а) 182
- б) 128 +
- в) 88

3. Множество решений уравнения записывается:

- а)  $\{-2,3\}$
- б)  $(2;-3)$
- в)  $\{2,-3\}$  +

4. Мощность множества  $B=\{0,1,2,3,5,9,27,38\}$  равна:

- а) 8 +
- б) 18
- в) 4

5. Правильная запись предложения « $Y$  – множество действительных чисел, больших 3» – это:

- а)  $Y=\{y|y\in\mathbb{R}, y>3\}$
- б)  $Y=\{\mathbb{R}|y>3\}$
- в)  $Y=\{y\in\mathbb{R}|y>3\}$  +

6. Декартово произведение множеств  $A=\{0,-3\}$  и  $B=\{-1,2\}$  – это:

- а)  $AB=\{(0,-1),(-3,2)\}$
- б)  $AB=\{(0,-1),(-3,-1),(0,2),(-3,2)\}$  +
- в)  $AB=\{0,-1\}$

7. Не пересекаются множества чисел:

- а) простых и четных
- б) простых и нечетных
- в) простых и составных +

8. Пересечение множеств равносторонних и прямоугольных треугольников – это множество треугольников:

- а) пустое множество +
- б) равнобедренных
- в) прямоугольных

9. Пересечение множеств прямоугольников и ромбов – это множество:

- а) параллелограммов
- б) прямоугольников
- в) квадратов +

10. Пересекаются множества чисел:

- а) четных и нечетных
- б) простых и четных +
- в) простых и составных

11. Мощность множества  $A = \{-3, 0, 2, 5, 13\}$  равна:

- а) 5 +
- б) 15
- в) 2

12. Правильная запись предложения « $X$  – множество целых чисел, больших  $-5$ » – это:

- а)  $X = \{Z \mid x > -5\}$
- б)  $X = \{xZ \mid x > -5\}$  +
- в)  $X = \{xQ \mid x > -5\}$

13. Декартово произведение множеств  $A = \{-1, 2\}$  и  $B = \{0, -3\}$  – это:

- а)  $AB = \{(-1, 0), (-1, -3), (2, 0), (2, -3)\}$  +
- б)  $AB = \{-1, 0\}$ ; 2)  $AB = \{(-1, 0), (2, -3)\}$
- в)  $AB = \{(0, -1), (-3, -1), (0, 2), (-3, 2)\}$

14. Множество решений неравенства записывается в виде:

- а)  $(1; 0)$
- б)  $(0; 1)$
- в)  $(-1; 0)$  +

15. Число всех подмножеств множества  $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$  равно:

- а) 64 +
- б) 46
- в) 164

16. Множество решений уравнения записывается:

- а)  $\{-4, 3\}$
- б)  $\{-3, 4\}$  +
- в)  $(3; -4)$

17. Математический символ  $\emptyset$  обозначает:

- а) нулевое множество
- б) бесконечное множество
- в) пустое множество +

18. Существует множество без элементов:

- а) нет
- б) да +
- в) в любом множестве не менее 1 элемента

19. Если все элементы множества  $A$  входят в множество  $B$ , то можно сказать, что:

- а)  $A$  – образ множества  $B$
- б)  $B$  – прообраз множества
- в)  $A$  – подмножество  $B$  +

20. Множество, состоящее из определенного числа конкретных элементов, называется:

- а) определенным
- б) конкретным +
- в) конечным

21. Если можно найти разность двух множеств, то можно найти их:

- а) объединение +
- б) произведение
- в) сумму

22. При обозначении множеств используют:

- а) только круглые скобки
- б) только фигурные скобки +
- в) иногда круглые, иногда фигурные, иногда одновременно оба вида скобок

23. При операциях на числовых множествах за универсальное множество берут:

- а) все целые числа
- б) только множество натуральных чисел
- в) всё множество действительных чисел +

24. Как можно изобразить множество графически:

- а) частью координатной плоскости
- б) диаграммами Эйлера-Венна +
- в) интервалом на числовой оси

25. При пересечении двух множеств получаем третье множество, которое:

- а) всегда состоит из одного элемента
- б) всегда не содержит элементов
- в) может состоять из одного элемента +

26. Множества обозначаются:

- а) малыми латинскими буквами
- б) большими латинскими буквами +
- в) кириллицей

27. Какой операции над множествами соответствует выражение:

“Элемент, принадлежащий полученному множеству, принадлежит множеству А И множеству В.”:

- а) пересечение множеств +
- б) перечисление множеств
- в) дополнение множества

28. Какой операции над множествами соответствует выражение:

“Элемент, принадлежащий полученному множеству, принадлежит множеству А ИЛИ множеству В.”:

- а) пересечение множеств
- б) перечисление множеств
- в) объединение множеств +

29. Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то записывают:

- а)  $x \in X +$
- б)  $x | X$
- в)  $x \subset X$

30. Если множество  $A$  является частью множества  $B$ , то записывают:

- а)  $A | B$
- б)  $A \subset B +$
- в)  $A \in B$

### **3. Комплект оценочных средств для промежуточной аттестации**

#### **3.1. Экзаменационные билеты (ЭБ)**

#### **4. Критерии оценивания**

«5» «отлично» или «зачтено» – студент показывает глубокое и полное овладение содержанием программного материала по УП, УД, МДК, практики, в совершенстве владеет понятийным аппаратом и демонстрирует умение применять теорию на практике, решать различные практические и профессиональные задачи, высказывать и обосновывать свои суждения в форме грамотного, логического ответа (устного или письменного), а также высокий уровень овладения общими и профессиональными компетенциями и демонстрирует готовность к профессиональной деятельности;

«4» «хорошо» или «зачтено» – студент в полном объеме освоил программный материал по УП, УД, МДК, практики, владеет понятийным аппаратом, хорошо ориентируется в изучаемом материале, осознанно применяет знания для решения практических и профессиональных задач, грамотно излагает ответ, но содержание, форма ответа (устного или письменного) имеют отдельные неточности, демонстрирует средний уровень овладения общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности;

«3» «удовлетворительно» или «зачтено» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений программного материала по УП, УД, МДК, практики но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, в применении знаний для решения практических и профессиональных задач, не умеет доказательно обосновать свои суждения, но при этом демонстрирует низкий уровень овладения общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности;

«2» «неудовлетворительно» или «не зачтено» – студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, беспорядочно и неуверенно излагает программный материал по УП, УД, МДК, практики, не умеет применять знания для решения практических и профессиональных задач, не демонстрирует овладение общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности.

## 5. Информационное обеспечение

перечень учебных изданий, электронных изданий, электронных и Интернет-ресурсов, образовательных платформ, электронно-библиотечных систем, веб-систем для организации дистанционного обучения и управления им, используемые в образовательном процессе как основные и дополнительные источники.

### Основные источники:

1. Математика. Алгебра и начала мат. анализа, геометрия. 10-11 кл.: Учебник. Баз.иуглубл. уровни ФГОС / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева.- М.: Просвещение, 2017.-463 с
2. Математика: Учебник / В.П. Григорьев.- М.: ИЦ Академия, 2016.-368 с.
3. Элементы высшей математики (12-е изд., стер.) учебник/ Григорьев В.П.- М.: ИЦ Академия,2017-400 с.
4. Математика: учебник для студентов учреждений СПО/ С.Г.Григорьев - 2-е изд.,стер.-М.:ИЦ «Академия», 2018. – 368 с
5. Математика: учебник для студентов учреждений СПО/ И.Д.Пехлецкий - 13-е изд.,стер.-М.:ИЦ «Академия», 2018. – 320 с.

### Дополнительные источники:

6. Подольский В.А. Сборник задач по математике: Учеб.пособие.-2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк., 1999.-495 с.

### Электронные издания (электронные ресурсы)

7. Информационно-образовательная среда «Российская электронная школа» <https://resh.edu.ru/>:

-<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4921/start/200887/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4923/start/200980/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/6114/start/201073/>

-<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4924/start/225713/>

- <https://resh.edu.ru/subject/lesson/3993/start/225744/>

### Цифровая образовательная среда СПО PROФобразование:

- Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Саратов :

Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 с. — ISBN 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROОбразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/81274> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Березина, Н. А. Высшая математика : учебное пособие / Н. А. Березина. — 2-е изд. — Саратов : Научная книга, 2019. — 158 с. — ISBN 978-5-9758-1888-1. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROОбразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/80978> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — 2-е изд. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 304 с. — ISBN 978-985-06-2884-8 (ч. 1), 978-985-06-2885-5. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROОбразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90754> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

-Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2016. — 272 с. — ISBN 978-985-06-2766-7 (ч. 2), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROОбразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90755> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Рябушко, А. П. Высшая математика. Теория и задачи. В 5 частях. Ч.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск :Вышэйшая школа, 2017. — 320 с. — ISBN 978-985-06-2798-8 (ч. 3), 978-985-06-2764-3. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROОбразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/books/90756> (дата обращения: 07.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

**Электронно-библиотечная система:**

IPR BOOKS - <http://www.iprbookshop.ru/78574.html>

**Веб-система для организации дистанционного обучения и управления им:**

Система дистанционного обучения ОГАПОУ «Алексеевский колледж»  
<http://moodle.alcollege.ru/>