МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«АЛЕКСЕЕВСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Комплект контрольно-оценочных средств

по учебной дисциплине

ЕН. 03 Теория вероятностей и математическая статистика

для специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование (администратор баз данных)

Алексеевка – 2022

Комплект контрольно-оценочных средств разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование (администратор баз данных)

Составитель:
Кузнецова И.С., преподаватель ОГАПОУ «Алексеевский колледж»

1. Паспорт комплекта оценочных средств

1.1 Область применения комплекта оценочных средств

Контрольно-оценочные средства (КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины ЕН 01 Теория вероятностей и математическая статистика

КОС включают контрольные материалы для проведения текущей и промежуточной аттестации в форме дифференцированного зачета.

КОС разработан на основании рабочей программы учебной дисциплины ЕН 01 Теория вероятностей и математическая статистика.

1.2 Цели и задачи учебной дисциплины – **требования к результатам освоения программы:**

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1 применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;

У2 использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач;

У3 применять современные пакеты прикладных программ многомерного статистического анализа.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать**:

З1 элементы комбинаторики;

З2 понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность;

З3 алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;

З4 схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу(теорему) Байеса;

З5 понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики;

З6 законы распределения непрерывных случайных величин;

З7 центральную предельную теорему, выборочный метод математической статистики, характеристики выборки;

З8 понятие вероятности и частоты.

Профессиональные (ПК) и общие (ОК) **компетенции**, которые актуализируются при изучении учебной дисциплины:

ОК1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.
ОК5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.
ОК9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Планируемые личностные результаты освоения рабочей программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 7. Осознающий приоритетную ценность личности человека; уважающий собственную и чужую уникальность в различных ситуациях, во всех формах и видах деятельности.

ЛР 8. Проявляющий и демонстрирующий уважение к представителям различных этнокультурных, социальных, конфессиональных и иных групп. Сопричастный к сохранению, преумножению и трансляции культурных традиций и ценностей многонационального российского государства.

ЛР 11. Проявляющий уважение к эстетическим ценностям, обладающий основами эстетической культуры.

1.3 Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

Наименование тем	Коды умений (У), знаний (З), личностных результатов (ЛР), формированию которых способствует элемент программы	Средства контроля и оценки результатов обучения **в рамках текущей аттестации** (номер задания)	Средства контроля и оценки результатов обучения **в рамках промежуточной аттестации** (номер задания/контрольного вопроса/ экзаменационного билета)
Тема 1. Элементы комбинаторики	У2 З1 ЛР 4	ТЗ № 1	КВ №7
Тема 2. Основы теории вероятностей	У1 У2 З2 З3 З4 ЛР 7	ПЗ №1 ПЗ №2	КВ №1-6, 8-10
Тема 3. Дискретные	У1	ПЗ № 3	КВ №11,13-15

случайные величины (ДСВ)	У2 З5 З6 ЛР 8	ПЗ № 4 ПЗ №5	
Тема 4. Непрерывные случайные величины (далее - НСВ)	У1 У2 З5 З6 З7 ЛР 8	ПЗ №6	КВ №11-19
Тема 5. Математическая статистика.	У1 У2 У3 З7 З8 ЛР 11	ПЗ №7	КВ №20-22

2. Комплект оценочных средств для текущей аттестации

2.1. Практические задания (ПЗ)

ПЗ №1-2 Тема: Вычисление вероятностей сложных событий. Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли.

Цель работы: вычисление вероятностей сложных событий с использованием формулы полной вероятности, формулы Байеса и Бернулли.

Содержание работы:

Основные понятия.

1 Формула полной вероятности: Вероятность события A, которое может произойти совместно с одной из гипотез H_1, H_2,…, H_n, образующих полную группу несовместных событий ($\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$) равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующие им условные вероятности события A: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$.

2 Формула Байеса: Вероятность гипотезы при условии, что событие А произошло, равна произведению вероятности этой гипотезы на соответствующую ей условную вероятность события А, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность события А.

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}$$

3 Если производится n независимых опытов в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью p, тогда вероятность того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле: $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$

Пример выполнения:

исходные данные:

1 Каждый из двух стрелков независимо друг от друга произвел выстрел по некоторому объекту. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен первым стрелком

Решение: Событие *A* – поражение объекта одним попаданием.

До опыта возможны следующие гипотезы:

H_1 – ни один стрелок не попадет;

H_2 – первый стрелок попадет, второй – нет;

H_3 – второй стрелок попадет, первый – нет.

H_4 – оба стрелка попадут;

Вероятности этих гипотез равны:

$P(H_1) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$

$P(H_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$

$P(H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

$P(H_4) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны:

$P\left(A/H_1\right) = 0$; $P\left(A/H_2\right) = 1$; $P\left(A/H_3\right) = 1$; $P\left(A/H_4\right) = 0$

После опыта гипотезы H_1 и H_4 становятся невозможными, а вероятность гипотезы H_2 будет равна $P\left(H_2/A\right) = \dfrac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(H_3)\cdot P\left(A/H_2\right) + P(H_4)\cdot P\left(A/H_3\right)} = \dfrac{0{,}28\cdot 1}{0{,}28 + 0{,}18} \approx 0{,}61$;

Ответ: вероятность того, что объект поражен первым стрелком, равна 0,61.

2 Для нормальной работы линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

Решение: Т.к. для нормальной работы надо 8 автобусов из 10, или 9 из 10, или 10, а вероятность выхода каждого автобуса p = 1 – q = 1 – 0,1 = 0,9. Вероятность нормальной работы – это сумма вероятностей:

$$P(A) = C_{10}^{8}p^8q^{10-8} + C_{10}^{9}p^9q^{10-9} + C_{10}^{10}p^8q^{10-8} =$$

$$= \frac{10!}{8!\cdot 2!}(0{,}9)^8(0{,}1)^2 + \frac{10!}{9!\cdot 1!}(0{,}9)^9(0{,}1) + \frac{10!}{10!\cdot 0!}(0{,}9)^{10}(0{,}1)^0 \approx$$

$$\approx \frac{9\cdot 10}{2}0{,}43\cdot 0{,}01 + 10\cdot 0{,}39\cdot 0{,}9 + 0{,}35 \approx$$

$$\approx 0{,}19 + 0{,}39 + 0{,}35 = 0{,}93$$

Ответ: $P(A) = 0{,}93$

Задания к практической работе.

1 В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе № 2 и 18 деталей - на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется отличного качества

2 Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх не больше 3 раз.

3 Игральная кость бросается 20 раз. Определить вероятность того, что 3 очка выпадут 7 раз

4 В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех заводах: с первого завода - 250 шт.; со второго - 525 шт.; с третьего - 275 шт. и с четвертого - 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1 500 часов, для первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При

первого завода равна 0,15, для второго - 0,30; для третьего - 0,20 и четвертого - 0,10. При
раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

5 Некоторое изделие выпускают тремя заводами. Объем продукции, поставляемый вторым предприятием, в 2 раза превышает соответствующие объемы продукций первого и третьего предприятий. Доля брака в среднем составляет на первом предприятии 5%, на втором - 20%, а на третьем - 10%. В продажу поступила партия данного изделия. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно было выпущено третьим предприятием?

6 Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что она упадет «гербом» вверх ровно 3 раза

7 На склад поступает продукция 3-х фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятые изделия произведены на первой фабрике, если они оказались нестандартными

8 Авиакружок посещают 20 человек. Определить вероятность того, что в кружке 4 девушки, если вероятность заинтересованности девушек этим кружком равна 0,2.

9 В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом равна 0,95, для винтовки без прицела – 0,7. Найти вероятность того, что

мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

10 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 10 случайно отобранных семян взойдет не менее 8.

11 По самолету производится 3 выстрела с вероятностями попадания 0,5; 0,6; 0,8. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

12 В институте 40% юношей - брюнеты, 35% - блондины, 25% - рыжие. Вероятность, что студентке Красавиной понравится брюнет, равна 0,7, блондин - 0,8, рыжий - 0,6. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент понравится Красавиной

13 В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что число заключенных договоров после 10 визитов составит 3.

14 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу микросхема окажется бракованной?

15 В первом контейнере находится 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Во втором находится 50 деталей, из которых 30 бракованных. В третьем контейнере - 50 деталей, среди которых 40 бракованных. Из случайно выбранного контейнера извлекается одна деталь, которая оказалась качественной. Определить вероятность того, что деталь была извлечена из первого контейнера

16 Страховая компания заключила 10 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2 %. Найти вероятность того, что таких случаев будет 2

17 Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания у первого охотника равна 0,2, а у второго 0,6. В результате первого залпа оказалось одно попадание в цель. Чему равна вероятность того, что промахнулся первый охотник?

18 Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковых машин эта вероятность равна 0,2.

К бензоколонке подъехала машина для заправки. Найти вероятность того, что эта машина грузовая

19 Вероятность всхожести пшеницы равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее 3?

20 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой урны.

21 При разрыве снаряда образуются 10% крупных осколков, 60% средних и 30% мелких. Вероятность пробивания брони крупным осколком – 0,7, средним – 0,2 и мелким – 0,05. Известно, что в броню попал осколок. Найти вероятность того, что броня пробита

22 Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго – 0,5, третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно

23 На склад ежедневно поступают детали с трех предприятий. С первого – 30 деталей, со второго – 20, с третьего – 40. Установлено, что 2, 4 и 5 % продукции этих предприятий, соответственно имеют дефекты. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет дефектна.

24 Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p=0,75. Найти вероятность того, что при 10 посещениях клиент совершит покупку ровно 8 раз

25 Имеются три урны: в первой из них 5 белых и 4 черных шара, во второй – 3 белых и 6 черных, в третьей – 2 белых и 7 черных. Из выбранной наугад урны вынимают шар. Он оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынут из второй урны.

26 Всхожесть семян некоторой культуры 90%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдет 70.

27 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена вторым поставщиком?

28 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда - с вероятностью 0,7; если три снаряда - с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

27 На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем 70% микросхем от первого поставщика, 30% – от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 2%, второго – 3%. Какова вероятность, что взятая наудачу бракованная микросхема изготовлена вторым поставщиком?

28 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель равна 0,4. Если в цель попал один снаряд, он поражает цель (выводит ее из строя) с вероятностью 0,3; если два снаряда - с вероятностью 0,7; если три снаряда - с вероятностью 0,9. Найти полную вероятность поражения цели.

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1* .

Литература:

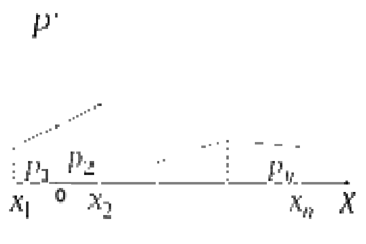
http://cyberfac.ru

http://www.matburo.ru

http://www.toehelp.ru

ПЗ №3 -4Тема: Графическое изображение распределения ДСВ. Функции от ДСВ. Построение закона распределения и функция распределения ДСВ

Многоугольник распределения ДСВ –графическое изображение ряда распределения ДСВ в декартовой системе координат.



Многоугольник распределения для ДСВ X , принимающей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно.

Аналитическая формапредставление закона распределения ДСВ с помощью формулы

$$P(X = x_i) = \phi(x_i)$$

Функция распределения $F(x)$ **ДСВ** X есть разрывная, ступенчатая функция, скачки которой соответствуют возможным значениям $x_1, x_2 \dots$ случайной величины X и равны вероятностям $p_1, p_2, \dots$ этих значений. Между скачками функция $F(x)$ сохраняет постоянное значение. В точке разрыва функция $F(x)$ равна тому значению, с которым она подходит к точке разрыва слева, т.е. $F(x)$ - непрерывна слева.

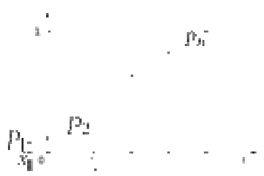


График функции распределения ДСВ X, принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Многоугольником *распределения вероятностей* данной величины называют *ломаную*, звенья которой соединяют соседние точки $(x_i; p_i)$. Термин, на мой взгляд, не слишком удачен, но так сошлись звёзды.

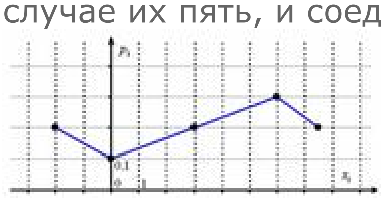
Всё очень просто:

Пример 11

Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины X

x_i	–2	0	3	6	7,5
p_i	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2

Решение: чертим **прямоугольную систему координат**, в которой по оси абсцисс отсчитываются x_i – значения случайной величины, а по оси ординат p_i – их вероятности. Отмечаем на чертеже точки $(x_i; p_i)$, в данном случае их пять, и соединяем «соседей» отрезками:



При выполнении чертежа от руки по возможности придерживайтесь следующего масштаба:

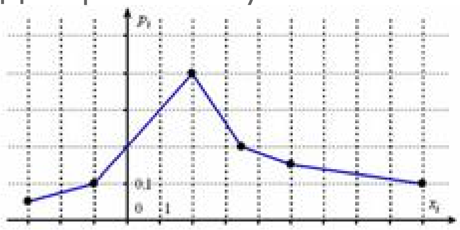
горизонтальная ось: 1 ед. = 2 тетрадные клетки (1 см);
вертикальная ось: 0,1 = 2 тетрадные клетки.

Если значения x_i достаточно велики, то ось абсцисс можно «разорвать» *(не чертить её кусочек после единицы)*, и справа продолжить нумерацию, например, с 20.

Теперь обратите внимание на следующую **важную вещь**: помимо того, что **дискретную случайную величину** можно *изобразить* с помощью многоугольника – её ведь можно ещё и ЗАДАТЬ этим способом. До сих пор мы делали это с помощью таблички, но никто же не мешает использовать и чертёж:

ример 12

Дискретная случайная величина X задана своим многоугольником



Записать закон распределения данной случайной величины.

Это задание для самостоятельного решения.

Иногда вместо «многоугольника» говорят о ***полигоне*** распределения вероятностей, но этот вариант больше применим в **математической статистике**.

На практике разобранные задачи встречаются не так уж редко, и поэтому я счёл нужным включить их в данную статью. Однако гораздо бОльшее распространение получила **функция распределения случайной величины**.

Стандартное **обозначение**: $F(x)$

И для дискретной, и для **непрерывной** случайной величины она определяется одинаково:

$F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* x, которая «пробегает» все **действительные значения** *(от «минус» до «плюс» бесконечности)*.

Смысл функции распределения хорошо иллюстрирует наша любимая игра:

X	–5	2,5	10
	0,5	0,4	0,1

Чему, например, равно значение $F(-20)$? Это вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем –20. И это **невозможное событие**: $F(-20) = P(X < -20) = 0$. Совершенно понятно, что $F(x) = 0$ и для всех «икс» из интервала $(-\infty; -5)$, **а также для** $x = -5$. Почему? По определению функции распределения:

$F(-5) = P(X < -5) = 0$ – вы согласны? Функция $F(x)$ возвращает вероятность того, что <u>в точке</u> $x = -5$ выигрыш будет СТРОГО МЕНЬШЕ «минус» пяти.

Таким образом: $F(x) = 0$, если $x \le -5$.

На интервале $-5 < x < 2{,}5$ функция $F(x) = P(X < x) = 0{,}5$,
поскольку **левее** любой точки этого интервала есть только одно значение $x_1 = -5$ случайной величины, которое появляется с вероятностью 0,5. Кроме того, сюда же следует отнести точку $x = 2{,}5$, так как:

$F(2{,}5) = P(X < 2{,}5) = 0{,}5$ – очень хорошо осознайте этот момент!

Таким образом, если $-5 < x \le 2{,}5$, то $F(x) = 0{,}5$

Далее рассматриваем промежуток $-2{,}5 < x \le 10$. СТРОГО ЛЕВЕЕ любой точки этого промежутка находятся два выигрыша $x_1 = -5,\ x_2 = 2{,}5$, поэтому:

$F(x) = P(X < x) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

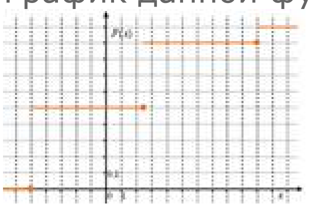
И, наконец, если $x > 10$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$,
ибо **все** значения $x_1 = -5,\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = 10$ случайной величины X лежат строго левее **любой** точки $x \in (10; +\infty)$

Заметим, кстати, **важную вещь**: коль скоро, функция $F(x)$
характеризуем ***вероятность***, то она может принимать значения лишь из промежутка $0 \le F(x) \le 1$ – и никакие другие!

Итак, функция распределения вероятностей ДСВ является *кусочной* и, как многие знают, в таких случаях принято использовать фигурные скобки:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -5 \\ 0{,}5, & \text{если } -5 < x \le 2{,}5 \\ 0{,}9, & \text{если } 2{,}5 < x \le 10 \\ 1, & \text{если } x > 10 \end{cases}$$

График данной функции имеет **разрывный** «ступенчатый» вид:



Причём, функция $F(x)$ или её график однозначно определяют сам закон распределения:

– в точке $x_1 = -5$ **«скачок» разрыва** равен 0,5 *(следим по чертежу)* – и это в точности вероятность $p_1 = 0{,}5$ этого значения;

– в точке $x_2 = 2{,}5$ «скачок» составляет $p_2 = 0{,}4$;

– и для выигрыша $x_3 = 10$ «высота ступеньки» равна $p_3 = 0{,}1$.

Таким образом, функция распределения вероятностей – это **ещё один способ** ЗАДАТЬ случайную величину. И этот способ особо важен для **непрерывной случайной величины** – по той причине, что её невозможно описать таблицей (ввиду бесконечного и ***несчётного*** количества принимаемых значений). Однако, всему своё время.

Сейчас мы освоим технические моменты решения типовой задачи:

Пример 13

Построить функцию распределения случайной величины X

x_i	-2	0	3	7
p_i	$0{,}4$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}2$

Найти вероятности того, что случайная величина примет значение из следующих промежутков:

$P(-1 < X < 5),\quad P(4 < X \le 10),\quad P(X \le 2),\quad P(3 \le X \le 7),\quad P(X > 7),\quad P(|X - M(X)| < \sigma(X))$

Решение: рассмотрим формальный алгоритм построения функции распределения.

Сначала берём первое значение $x_1 = -2$ и составляем *нестрогое* неравенство $x \le -2$. На этом промежутке $F(x) = 0$.

На промежутке $-2 < x \le 0$ *(между* x_1 *и* x_2 *)*:
$F(x) = 0{,}4$

На промежутке $0 < x \le 3$ *(между* x_2 *и* x_3 *)*:
$F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

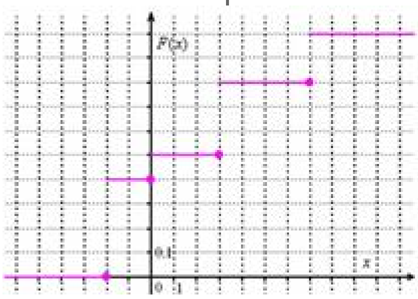
На промежутке $3 < x \le 7$ *(между* x_3 *и* x_4 *)*:
$F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

И, наконец, если x строго больше самого последнего значения $x_4 = 7$, то:
$F(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$

Легко заметить, что с увеличением «икс» идёт накопление (суммирование) вероятностей, и поэтому функцию $F(x)$ также называют ***интегральной*** функцией распределения. В практических задачах проведённые выше действия нужно выполнять в уме, а результат сразу записывать под единую скобку:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -2 \\ 0{,}4, & \text{если} \quad -2 < x \le 0 \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0 < x \le 3 \\ 0{,}8, & \text{если} \quad 3 < x \le 7 \\ 1, & \text{если} \quad x > 7 \end{cases}$$

Выполним чертёж:



и проконтролируем правильность решения с помощью «скачков» графика: в точке $x_1 = -2$ «скачок» равен $p_1 = 0{,}4$, в точках: $x_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0{,}1, \quad x_3 = 3 \Rightarrow p_3 = 0{,}3, \quad x_4 = 7 \Rightarrow p_4 = 0{,}2$

При выполнении чертежа от руки оптимален следующий масштаб:

горизонтальная ось: 1 ед. = 2 или 1 тетрадная клетка;
вертикальная ось: 0,1 = 1 тетрадная клетка.

На левых концах ступенек (кроме нижнего луча) можно ставить выколотые точки – дело вкуса. И ещё хочу остановиться на двух технических ошибках, которые часто допускают на практике. При выполнении чертежа простым карандашом левый нижний луч следует прочерчивать жирно (чтобы он не сливался с координатной осью) и до конца оси! Второй момент: правая верхняя линия не должна заканчиваться **раньше** *острия* оси! Такие оплошности могут говорить о непонимании функции распределения, а это, как вы понимаете, скверно.

Переходим ко второй части задания.

Найдём $P(-1 < X < 5)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-1;\,5)$.

И здесь я сформулирую **практическое правило**: если оба конца a и b промежутка **не «попадают»** в точки разрыва функции $F(x)$, то следующие вероятности: $P(a < X < b), P(a \le X < b)$, $P(a < X \le b), P(a \le X \le b)$ можно найти по единой формуле:

$$F(b) - F(a)$$

В данном случае концы интервала (–1 и 5) находятся в области непрерывности функции распределения поэтому:
$P(-1 < X < 5) = F(5) - F(-1) = 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4$

И действительно, на данном интервале находятся значения $x_2 = 0,\ x_3 = 3$, вероятности появления которых: $p_2 = 0{,}1, p_3 = 0{,}3$.

Вычислим вероятность $P(4 < X \le 10)$. Оба конца этого промежутка не «попадают» в точки разрыва, поэтому:
$P(4 < X \le 10) = F(10) - F(4) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного промежутка. И в самом деле – на нём находится единственное значение $x_4 = 7$, которое может появиться с вероятностью 0,2.

Та же самая история с $P(X \le 2)$ – единственное, тут левый конец промежутка равен «минус» бесконечности:
$P(X \le 2) = F(2) - F(-\infty) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$ – самостоятельно проанализируйте, какие значения x_i, и с какими вероятностями располагаются на полуинтервале $(-\infty; 2]$

Теперь более занятная ситуация, где нужно особо включать голову: если **хотя бы один** из концов a и b промежутка **«попадает»** в точку разрыва функции, то указанную выше формулу можно использовать лишь в одном случае из четырёх:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

! Примечание: *если* $a = -\infty$ *, то левое неравенство становится строгим, но формула тоже применима.*

Это равенство строго доказывается в курсе теории вероятностей – перепишите в свой справочник!

Найдём $P(3 \le X \le 7)$. Как быть? – под правило не подходит!
Вспоминаем **теоремы тервера**. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(3 \le X \le 7) = P(3 \le X < 7) + P(7) = F(7) - F(3) + p_4 = 0{,}8 - 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}5$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из отрезка $[3;\, 7]$. И действительно, этот отрезок включает в себя два значения $x_3 = 3,\ x_4 = 7$, которые появляются с вероятностями $p_3 = 0{,}3,\ p_4 = 0{,}2$.

Тут же рассмотрим три других ситуации:
$P(3 < X < 7) = 0$, т.к. на интервале $(3;\, 7)$ нет значений случайной величины. Да-да, так и пишем.

$P(3 \le X < 7) = F(7) - F(3) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$ – это «штатный» теоретический случай.

И для 2-го полуинтервала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий:
$P(3 < X \le 7) = P(3 < X < 7) + P(7) = 0 + p_4 = 0{,}2$

Едем дальше:
$P(X > 7) = 0$, поскольку там нет значений случайной величины. Кстати, случай с *нестрогим* неравенством – есть «штатный» случай:
$P(X \ge 7) = P(7 \le X < +\infty) = F(+\infty) - F(7) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
который можно записать и так: $P(X \ge 7) = p_4 = 0{,}2$ – на функции распределения «свет клином не сошёлся»!

И, наконец, типовая вероятность $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$ – того, что значение случайной величины X отклонится от своего **математического ожидания** не более чем на **среднее квадратическое отклонение**. Как вы догадываетесь, их нужно предварительно вычислить, но эти числовые характеристики уже найдены в *Примере 6* статьи о **дисперсии**: $M(X) = 1{,}5,\ \sigma(X) = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}44$. Раскрываем **модуль** и пользуемся тем фактом, что концы интервала не «попадают» в точки разрыва функции распределения:

$= P(1{,}5 - \sqrt{11{,}85} < X < 1{,}5 + \sqrt{11{,}85}) = F(1{,}5 + \sqrt{11{,}85}) - F(1{,}5 - \sqrt{11{,}85}) =$
$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) = P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) =$
$= 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}4$ – искомая вероятность.

Напоминаю, что в типичном случае на интервале $(M(X) - \sigma(X);\, M(X) + \sigma(X))$ и вблизи него «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Так сказать, «центр событий».

Ответ:
$P(-1 < X < 5) = 0{,}4,\quad P(4 < X \le 10) = 0{,}2,\quad P(X \le 2) = 0{,}5,$
$P(3 \le X \le 7) = 0{,}5,\quad P(X > 7) = 0,\quad P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = 0{,}4$

Напоминаю, что для любителей комфорта есть соответствующая программа *(см. после **Примера 6**)*, которая строит графики автоматически; причём результаты её работы элементарно копируются в Вёрд.

И аналогичное задание для самопроверки:

Пример 14

Составить функцию распределения случайной величины X

x_i	12	16	21	26	30
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Выполнить чертёж. Найти вероятности следующих событий:
$P(15 < X < 25)$, $P(12 < X \le 20)$, $P(X \ge 21)$, $P(X < 16)$, $P(X \le 16)$, $P(|X - M(X)| < \sigma(X))$

Подумайте над рациональным масштабом графика. Если возникают сомнению с нахождением вероятностей, помните – их всегда можно пересчитать вручную.

Решение и ответ совсем рядом. Кроме того, **несколько дополнительных задач** есть в библиотеке.

И не успела появиться эта статья, как от читателей сайта стали поступать просьбы включить в неё контрольный пример. Я даже прослезился (прямо как тот профессор), и, конечно же, не мог вам отказать:

Пример 15

В билете три задачи. Вероятность того, что студент правильно решит первую задачу, равна 0,9, вторую – 0,8, третью – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете, вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что студент сдаст зачёт, если для этого нужно правильно решить не менее двух задач.

Проверьте, насколько хорошо вы усвоили материал. Тут нужно использовать **теоремы умножения и умножения**, и могут возникнуть накладки с обозначениями. В образце решения я обозначил $p_1 = 0,9, \quad p_2 = 0,8, \quad p_3 = 0,7$, а вероятности значений случайной величины – через $p(0), p(1), p(2), p(3)$.

После чего мы перейдём к изучению **непрерывной случайной величины**.

Да, наш урок, посвященный дискретной случайной величине, подошел к концу – но это не значит, что тема закрыта!

Вперёд – за новыми открытиями!

Решения и ответы:

Пример 12. **Решение**: запишем закон распределения случайной величины X :

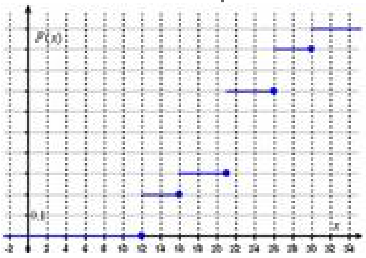
x_i	–3	–1	2	3,5	5	9
p_i	0,05	0,1	0,4	0,2	0,15	0,1

Контроль: $\sum p_i = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}1 = 1$

Пример 14. **Решение**: составим функцию распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 12 \\ 0{,}2, & \text{если } 12 < x \le 16 \\ 0{,}3, & \text{если } 16 < x \le 21 \\ 0{,}7, & \text{если } 21 < x \le 25 \\ 0{,}9, & \text{если } 25 < x \le 30 \\ 1, & \text{если } x > 30 \end{cases}$$

Выполним чертёж:



Примечание: сплошная нумерация по оси абсцисс представлена исключительно ради удобства восприятия.

Вычислим вероятности того, что случайная величина X примет значение из предложенных интервалов:

$$P(15 < X < 25) = F(25) - F(15) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$$

$$P(12 < X \le 20) = P(12 < X < 16) + P(16 \le X < 20) + P(20) = 0 + F(20) - F(16) + 0 = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$$

более простой способ:

$$P(12 < X \le 20) = P(16) = p_2 = 0{,}1$$

$P(X \ge 21) = P(21 \le X < +\infty) = F(+\infty) - F(21) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ («штатный» случай)

$P(X < 16) = F(16) - F(-\infty) = 0{,}2 - 0 = 0{,}2$ (частный случай «штатной» формулы)

$P(X \le 16) = P(X < 16) + P(16) = 0{,}2 + p_2 = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$

Числовые характеристики $M(X) = 20{,}6,\ \sigma(X) = \sqrt{31{,}64} \approx 5{,}62$ найдены в **Примере 8**, вычислим вероятность того, что случайная величина X отклонится от математического ожидания не более чем на среднее квадратическое отклонение:

$$P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = P(-\sigma(X) < X - M(X) < \sigma(X)) = P(M(X) - \sigma(X) < X < M(X) + \sigma(X)) =$$

$$= P\left(20{,}6 - \sqrt{31{,}64} < X < 20{,}6 + \sqrt{31{,}64}\right) = F\left(20{,}6 + \sqrt{31{,}64}\right) - F\left(20{,}6 - \sqrt{31{,}64}\right) = 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Ответ:

$P(15 < X < 25) = 0{,}5, \quad P(12 < X \le 20) = 0{,}1, \quad P(X \ge 21) = 0{,}7,$

$P(X < 16) = 0{,}2, \quad P(X \le 16) = 0{,}3, \quad P(|X - M(X)| < \sigma(X)) = 0{,}7$

Пример 15. ***Решение****: найдём вероятности того, что соответствующие задачи будут решены неверно:*

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Используя теоремы умножения независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины X – числа правильно решенных задач в билете:

0) $x = 0$ *(все задачи решены неверно)*

$p(0) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$

1) $x = 1$

$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092$

2) $x = 2$

$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398$

3) $x = 3$ *(все задачи решены правильно)*

$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$

Таким образом, искомый закон распределения:

x_i	0	1	2	3
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504

Контроль: 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1

Вычислим $M(X)$ *и* $D(X)$*. Заполним расчетную таблицу:*

x_i	0	1	2	3	Суммы:
$p(i)$	0,006	0,092	0,398	0,504	1
$x_i p(i)$	0	0,092	0,796	1,512	2,4
$x_i^2 p(i)$	0	0,092	1,592	4,536	6,22

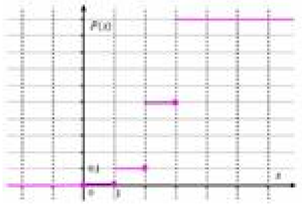
Математическое ожидание: $M(X) = 2{,}4$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6{,}22 - (2{,}4)^2 = 6{,}22 - 5{,}76 = 0{,}46$.

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ 0{,}006, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0{,}098, & \text{если } 1 < x \le 2 \\ 0{,}496, & \text{если } 2 < x \le 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Найдём вероятность $P(X \geq 2)$ *– того, что студент сдаст зачёт:*

$P(X \geq 2) = P(2 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(2) = 1 - 0{,}098 = 0{,}902$

ПЗ №5 Тема: Вычисление числовых характеристик ДСВ.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

M(C)=C

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

M(Cx)=C*M(x)

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$M(x_1 * x_2 * \ldots * x_n) = M(x_1) * M(x_2) * \ldots M(x_n)$

Дисперсией случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$D(x)=M((x-M(x))^2)$ или $D(x)=M(x^2) - (M(x))^2$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равно нулю:

D(C)=0

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$D(Cx)=C^2*D(x)$

дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)$$

Свойства среднеквадратического отклонения:

- $\sigma(C) = 0$

- $\sigma(Cx) = |C| * \sigma(x)$

Пример 1. *Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти p(x<2), p(x>4), p(2≤x≤4), математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.*

x_i					
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. *p(x<2)=0,1;*

p(x>4)=0,1;

p(2≤x≤4)=0,2+0,4+0,2=0,8;

*M(x)=1*0,1+2*0,2+3*0,4+4*0,2+5*0,1=3;*

$D(x)=1^2*0,1+2^2*0,2+3^2*0,4+4^2*0,2+5^2*0,1-3^2=1,2$

$\sigma(x)= \sqrt{1,2} =1,095$

Пример 2. *Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:*

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2		-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

Решение.*x – случайная, прибыль от продажи 10 яиц.*

*M(x)=0,6*0,2+0,4*0,5+0,2*0,2+0*0,06-0,2*0,04=0,352*

*M(10000x)=10000*0,352=3520 $*

$D(x)=0.6^2*0.2+0.4^2*0.5+0.2^2*0.2+0^2*0.06+(-0.2)^2*0.04-0.352^2=0.037696$

$\sigma(x)= \sqrt{0,037696} =0.194154578$

$D(10000x)=10000^2* D(x)=19415457.76$

$\sigma(x)= \sqrt{0,194154578} =0.441$

Указания к выполнению практической работы: для решения задач использовать данные таблицы №2. Данные своей задачи взять из таблицы по номеру, соответствующему порядковому номеру в учебном журнале. Работу оформить в отдельных тетрадях для практических работ. При необходимости использовать литературу из приведенного ниже списка.

Основные понятия и определения.

К важнейшим числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание и дисперсия.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины x называется произведение всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

- математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

M(C)=C

- постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

M(Cx)=C*M(x)

- математическое ожидание суммы случайных величины равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i)$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$M(x_1*x_2*…*x_n)=M(x_1)*M(x_2)*…M(x_n)$

Дисперсией случайной величины x называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$D(x)=M((x-M(x))^2)$ или $D(x)=M(x^2) - (M(x))^2$

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Свойства дисперсии:

- дисперсия постоянной равно нулю:

D(C)=0

- постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$D(Cx)=C^2*D(x)$

- дисперсия суммы (разности) случайных величины равно сумме дисперсий слагаемых:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(x_i)$$

Свойства среднеквадратического отклонения:

- $\sigma(C) = 0$

- $\sigma(Cx) = |C| * \sigma(x)$

Пример 1.*Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти $p(x<2)$, $p(x>4)$, $p(2\le x\le 4)$, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.*

x_i					
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение.*$p(x<2)=0{,}1$;*

$p(x>4)=0{,}1$;

$p(2\le x\le 4)=0{,}2+0{,}4+0{,}2=0{,}8$;

$M(x)=1*0{,}1+2*0{,}2+3*0{,}4+4*0{,}2+5*0{,}1=3$;

$D(x)=1^2*0{,}1+2^2*0{,}2+3^2*0{,}4+4^2*0{,}2+5^2*0{,}1-3^2=1{,}2$

$\sigma(x)=\sqrt{1{,}2}=1{,}095$

Пример 2.*Фермер считает, что, принимая во внимание различные потери и колебания цен, он сможет выручить не более 60 центов за десяток яиц и потерять не более 20-ти центов за десяток и что вероятности возможных выигрышей и потерь таковы:*

цена за 10 яиц	0,6	0,4	0,2		-0,2
P	0,2	0,5	0,2	0,06	0,04

Как оценить ожидаемую прибыль от продажи десятка яиц; от ожидаемых им в этом году 100000 яиц?

Решение.*x – случайная, прибыль от продажи 10 яиц.*

$M(x)=0{,}6*0{,}2+0{,}4*0{,}5+0{,}2*0{,}2+0*0{,}06-0{,}2*0{,}04=0{,}352$

$M(10000x)=10000*0{,}352=3520$ \$

$D(x)=0.6^2*0.2+0.4^2*0.5+0.2^2*0.2+0^2*0.06+(-0.2)^2*0.04-0.352^2=0.037696$

$\sigma(x)=\sqrt{0{,}037696}=0.194154578$

$D(10000x)=10000^2*D(x)=19415457.76$

$\sigma(x)=\sqrt{0{,}194154578}=0.441$

Указания к выполнению практической работы: для решения задач использовать данные таблицы №2. Данные своей задачи взять из таблицы по номеру, соответствующему порядковому номеру в

учебном журнале. Работу оформить в отдельных тетрадях для практических работ. При необходимости использовать литературу из приведенного ниже списка.

Задания:

1. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-1		
p_i	p_2	p_1	

Найти P{X<0}, P{X>-1}, P{-1<X<1}. Найти MX, DX.

2. Построить таблицу распределения и найти MY, DY для случайной величины Y=2X+3 (X задана в предыдущей задаче).

ПЗ №6 Тема: Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения.

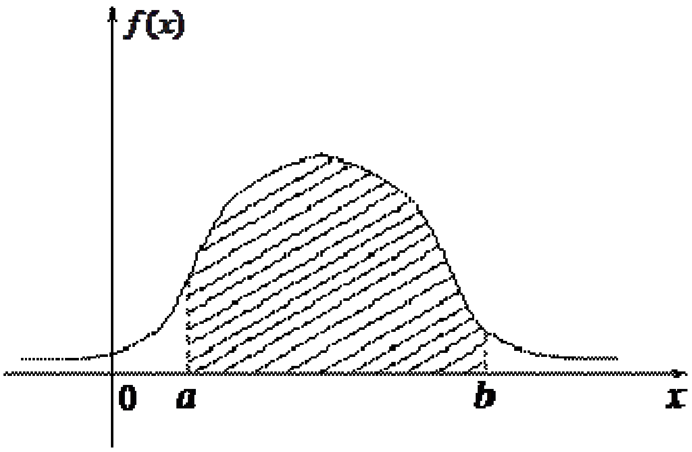
Плотностью распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины *X* называется производная от ее функции распределения, т.е.:

$f(x) = F'(x)$. (1)

Если известна плотность распределения вероятностей $f(x)$, то справедлива формула:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$. (2)

Геометрически вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение из интервала $(a;b)$, численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения плотности $f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a$ и $x = b$



Связь между функцией распределения $F(x)$ и плотностью вероятности $f(x)$:

1. Если известна $F(x)$, то $f(x) = F'(x)$.

2. Если известна $f(x)$, то $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. (3)

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x) \geq 0$ при любом $x \in R$.

2. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$. (4)

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины *X*, возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, вычисляются, соответственно, по формулам:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$, (5)

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(x)$$. (6)

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины *X* принадлежат интервалу $(a;b)$, то формулы принимают вид:

$$M(x)=\int_a^b xf(x)dx \quad , (7)$$

$$D(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x) \quad . (8)$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной случайной величины:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)} \ .$$

Замечание. Следует заметить, что важнейшая характеристика положения – математическое ожидание – существует не для всех случайных величин. Можно составить примеры таких случайных величин, для которых математического ожидания не существует, так как соответствующая сумма или интеграл расходятся.

Пример. По заданной функции распределения $F(x)$ найти функцию плотности $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, найти $M(X), D(X), \sigma(X),$

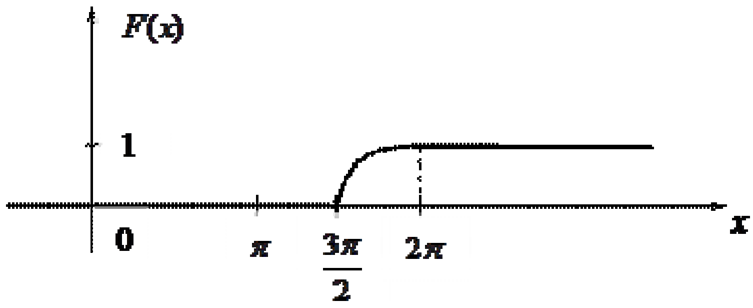
$$P(X>\frac{5\pi}{3}) \ .$$

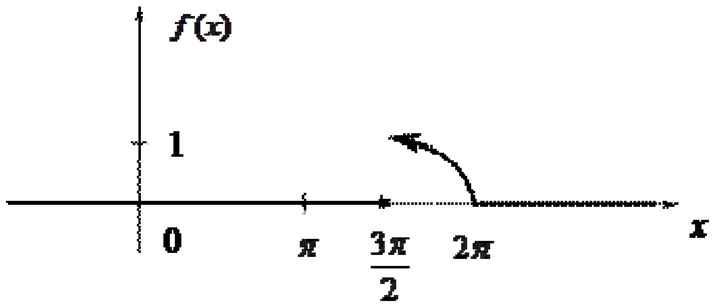
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3\pi/2 \\ \cos x, & 3\pi/2 < x \le 2\pi \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Решение.Функцию плотности $f(x)$ находим по определению $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 3\pi/2 \\ -\sin x, & 3\pi/2 < x \le 2\pi \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Строим графики функций $F(x)$ и $f(x)$





Пользуясь формулой (7) , находим математическое ожидание случайной величины *X*:

$$M(X)=\int_{3\pi/2}^{2\pi} x\cdot(-\sin x)dx =$$

Указанный интеграл вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du .$$

В нашем случае:

$$u=x \quad\Rightarrow\quad du=dx,$$
$$dv=-\sin x\cdot dx \quad\Rightarrow\quad v=\cos x.$$

$$= \quad x\cos x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}-\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\cdot dx = x\cos x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}-\sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=$$

$$=2\pi-0-(0+1)=2\pi-1.$$

Пользуясь формулой (8) , находим дисперсию случайной величины *X*:

$$D(X)=\int_{3\pi/2}^{2\pi} x^2\cdot(-\sin x)dx-(2\pi-1)^2 \quad =$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx,$$
$$dv = -\sin x dx \quad \Rightarrow \quad v = \cos x$$

$$= \quad x^2 \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - 2\int_{3\pi/2}^{2\pi} x\cos x dx - (2\pi - 1)^2 \quad =$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$
$$dv = \cos x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x.$$

$$= \quad 4\pi^2 - 0 - 2\left(x\sin x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sin x dx \right) - (2\pi - 1)^2 =$$
$$= 4\pi^2 - 2\left(0 + \frac{3\pi}{2} + \cos x \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \right) - (4\pi^2 - 4\pi + 1) =$$
$$= 4\pi^2 - 2\left(\frac{3\pi}{2} + 1 - 0 \right) - 4\pi^2 + 4\pi - 1 = -3\pi - 2 + 4\pi - 1 =$$
$$= \pi - 3.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\pi - 3}.$$

По формуле вычисляем:

$$P(X > \frac{5\pi}{3}) = P(\frac{5\pi}{3} < X < +\infty) = F(+\infty) - F(\frac{5\pi}{3}) =$$
$$= 1 - \cos\frac{5\pi}{3} = 1 - \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = 1 - \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Задачи

1.В магазине имеются 10 телевизоров, из которых 4 дефектные. Пусть X – случайная величина – число исправных телевизоров среди трех выбранных. Найти закон распределения X, M(X) и D(X).

2.В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна 0,8, второй – 0,6 и третьей – 0,4. Найти математическое ожидание и дисперсию числа правильно решенных задач.

Случайная величина X принимает значения x_1 и x_2 с вероятностями 0,2 и 0,8 соответственно. Известны ее математическое ожидание M(X) = 1,3 и дисперсия D(X) = 0,16. Найти значения случайной величины.

4.Найти закон распределения числа пакетов акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из трех пакетов равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины, построить функцию распределения.

5.Случайная величина распределена равномерно на некотором промежутке. Найти концы этого промежутка, если ее математическое ожидание равно 5, а дисперсия равна $25/3$.

6.Вероятность попадания в мишень равна р. Пусть X – случайная величина, характеризующая количество попаданий в мишень при одном выстреле. Пусть Y – случайная величина, характеризующая количество промахов по мишени при одном выстреле. Найти совместный закон распределения дискретной случайной величины {X,Y} и ее функцию распределения.

7.Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}3, & 1<x\le 2,\\ 0{,}7, & 2<x\le 3,\\ 1, & 3<x.\end{cases}$$

Найти: а) ряд распределения; б) M(X) и D(X); в) построить многоугольник распределения и график F(x).

8.Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся поступающим в институт. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Найти закон распределения числа пакетов акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из трех пакетов равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины, построить функцию распределения.

10.Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

ПЗ №7 Тема: Числовые характеристики вариационного ряда.

Построив вариационный ряд и изобразив его графически, можно получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в ряду наблюдений. Для дальнейшего изучения изменения значений признака используются числовые характеристики вариационного ряда. Основные характеристики вариационного ряда можно разбить на три группы:
1) ***показатели центра распределения***, 2) ***показатели вариации***,
3) ***показатели формы распределения***.

Показатели центра распределения

Характеристиками центра распределения данных вариационного ряда являются ***средняя арифметическая***, ***медиана*** и ***мода***.

Средней арифметической $\bar{x}$ наблюдаемых значений признака называется частное от деления суммы всех этих значений на их число, т.е. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. (Вычисленная по этой формуле средняя арифметическая называется ***простой***).

Если данные наблюдений представлены в виде дискретного вариационного ряда, то $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{v} m_i}$ или $\bar{x} = \sum_{i=1}^{v} x_i \cdot d_i$. (В этих случаях средняя арифметическая называется ***взвешенной***.)

Для определения среднего значения признака интервального вариационного ряда необходимо его условно заменить дискретным, а затем воспользоваться формулой средней арифметической взвешенной. Понятно, что в случае неравномерного распределения значений признака внутри частичных интервалов, полученное значение средней арифметической может отличаться от рассчитанного по несгруппированным данным.

Медиана (Me) – значение признака в середине вариационного ряда.

Для определения медианы дискретного вариационного ряда вначале необходимо найти её позицию по формуле $№_{Me} = \frac{n+1}{2}$. Этой позиции и соответствует значение медианы. Оно может быть вариантом ряда или промежуточным значением между двумя соседними вариантами.

Для расчёта медианы интервального вариационного ряда вначале определяется медианный интервал: 1) просматриваются накопленные частоты, 2) первая из накопленных частот, превышающая половину всего объёма изучаемой совокупности, соответствует медианному интервалу. Далее значение медианы вычисляется по формуле:

$$Me = a_{Me} + h_{Me} \frac{1/2 \sum_{i=1}^{v} m_i - S}{m_{Me}},$$

где h_{Me} - длина медианного интервала;

α_{Me} - нижняя граница медианного интервала;

m_{Me} - частота медианного интервала;

S – накопленная частота интервала, предшествующего медианному.

Мода (Mo) – значение признака, наиболее часто встречающееся в вариационном ряду.

Мода дискретного вариационного ряда соответствует варианту с наибольшей частотой.

Для определения моды интервального вариационного ряда вначале устанавливается модальный интервал: если рассматривается интервальный вариационный ряд с равными интервалами, то модальный интервал определяется по наибольшей частоте; если рассматривается интервальный вариационный ряд с неравными интервалами, то модальный интервал определяется по наибольшей плотности распределения. Далее мода рассчитывается по формуле:

$$Mo = \alpha_{Mo} + h_{Mo} \frac{m_{Mo} - m_{Mo-1}}{(m_{Mo} - m_{Mo-1}) + (m_{Mo} - m_{Mo+1})},$$

где h_{Mo} - длина модального интервала;

α_{Mo} - нижняя граница модального интервала;

m_{Mo} , m_{Mo-1} , m_{Mo+1} - частота модального интервала, частота интервала, предшествующего модальному, и частота интервала, следующего за модальным.

Средняя арифметическая имеет существенные преимущества перед другими мерами центральной тенденции, т.к. основывается на информации, содержащей все значения вариационного ряда. Однако, она весьма чувствительна к крайним значениям ряда. Поэтому, если необходимо предотвратить влияние нескольких наблюдений, расположенных далеко от центра распределения, то следует использовать медиану. Моде отдаётся предпочтение при изучении цен на рынке, спроса населения на некоторые продукты питания, одежду и обувь определённых размеров.

Пример 8. По данным примера *3* определить меры центральной тенденции.

Для дискретного вариационного ряда среднее значение признака вычисляется по формуле средней арифметической взвешенной, т.е.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 4 + 2 + 1} = 3,6$$

или

$$\bar{x} = 0 \cdot 1/23 + 1 \cdot 2/23 + 2 \cdot 3/23 + 3 \cdot 4/23 + 4 \cdot 6/23 + 5 \cdot 4/23 + 6 \cdot 2/23 + 7 \cdot 1/23 = 3,6.$$

В среднем банк *N* выдавал в день по *3,6* ипотечных кредита.

Позиция медианы данного вариационного ряда соответствует *12* значению признака в ранжированном ряду ($№_{Me} = \frac{23+1}{2} = 12$). Таким образом, $Me = 4$ (смотри пример *2*). Это значит, что срединное значение количества ипотечных кредитов, выданных в день банком *N*, равно *4*.

Мода дискретного вариационного ряда определяется по варианту с наибольшей частотой. Следовательно, $Mo = 4$. Наиболее часто банк *N* выдавал в день по *4* ипотечных кредита.

Пример 9. По данным примера *4* определить меры центральной тенденции.

Для определения среднего значения признака интервального вариационного ряда сначала необходимо условно заменить его дискретным (смотри пример *6*). Далее можно использовать формулу средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{150 \cdot 3 + 250 \cdot 5 + 350 \cdot 9 + 450 \cdot 14 + 550 \cdot 8 + 650 \cdot 3}{3 + 5 + 9 + 14 + 8 + 3} = 398,8$$

.

В период распродажи по сниженным ценам средняя сумма дневной выручки в магазине детских товаров составила *398,8* д.е.

Вычисление медианы интервального вариационного ряда начинается с установления медианного интервала. Сумма всех частот равна *42*. Первая из накопленных частот, превышающая половину объёма изучаемой совокупности, соответствует интервалу от *400* до *500* д.е. (смотри пример *5*). Следовательно, $Me = 400 + 100 \cdot \frac{1/2 \cdot 42 - 17}{14} = 428,6$. Срединное значение суммы дневной выручки в магазине детских товаров в период распродажи составило *428,6* д.е.

Для определения моды интервального вариационного ряда вначале выбирается модальный интервал. Так как рассматривается интервальный вариационный ряд с равными интервалами, то модальный интервал устанавливается по наибольшей частоте. Наибольшая частота, равная *14*, соответствует интервалу от *400* до *500* д.е. Значение моды составляет $Mo = 400 + 100 \cdot \dfrac{14-9}{(14-9)+(14-8)} = 445{,}5$. Наиболее часто встречавшаяся сумма дневной выручки магазина детских товаров в период распродажи - *445,5* д.е.

Показатели вариации

В статистике используется ряд мер вариабельности (колеблемости).

Размах вариации – разность между наибольшим и наименьшим вариантами $R = x_{max} - x_{min}$.

Размах вариации – показатель разброса значений признака в наборе данных. Однако больший интерес представляют показатели рассеяния наблюдаемых значений признака вокруг средней арифметической.

Средним линейным отклонением вариационного ряда называется средняя арифметическая абсолютных величин отклонений наблюдаемых значений признака от их средней арифметической $\bar{l} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$. Если данные наблюдений представлены в виде дискретного вариационного ряда, то $\bar{l} = \dfrac{\sum_{i=1}^{v} |x_i - \bar{x}| m_i}{\sum_{i=1}^{v} m_i}$.

Дисперсией вариационного ряда называется средняя арифметическая квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от средней арифметической $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$. Если же данные наблюдений представлены в виде дискретного вариационного ряда, то $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{v} (x_i - \bar{x})^2 m_i}{\sum_{i=1}^{v} m_i}$. Именно этот показатель чаще всего используется для характеристики рассеяния наблюдаемых значений признака вокруг средней арифметической. Вместе с тем дисперсия обладает одним существенным недостатком: выражается в квадратных единицах. Поэтому применяется ещё один показатель – ***среднее квадратическое отклонение***, который определяется как арифметический квадратный корень из дисперсии $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ и имеет ту же размерность, что и изучаемый признак. Среднее квадратическое отклонение превышает среднее линейное отклонение в соответствии со свойством мажорантности средних.

Рассмотренные показатели являются абсолютными мерами рассеяния вариантов ряда. В некоторых случаях используются и относительные меры рассеяния, например, ***коэффициент вариации***. Он представляет собой отношение среднего квадратического отклонения к средней арифметической:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

.

Чем меньше коэффициент вариации, тем однороднее совокупность, тем точнее средняя отражает значения изучаемого признака.

Пример 10. По данным примера *3* рассчитать показатели вариации.

Размах вариации $R = 7 - 0 = 7$ (ипотечных кредитов).

Среднее линейное отклонение составило

$$\bar{l} = \frac{|0-3,6|\cdot 1 + |1-3,6|\cdot 2 + |2-3,6|\cdot 3 + |3-3,6|\cdot 4 + |4-3,6|\cdot 6}{1+2+3+4+6+4+2+1} +$$

$$+ \frac{|5-3,6|\cdot 4 + |6-3,6|\cdot 2 + |7-3,6|\cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 1,4$$ (ед.).

Дисперсия равна

$$\sigma^2 = \frac{(0-3,6)^2\cdot 1 + (1-3,6)^2\cdot 2 + (2-3,6)^2\cdot 3 + (3-3,6)^2\cdot 4 + (4-3,6)^2\cdot 6}{1+2+3+4+6+4+2+1} +$$

$$+ \frac{(5-3,6)^2\cdot 4 + (6-3,6)^2\cdot 2 + (7-3,6)^2\cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 2,9$$ (ед.^{2}).

Среднее квадратическое отклонение - $\sigma = \sqrt{2,9} = 1,7$ (ед.).

Наконец, коэффициент вариации - $V = \frac{1,7}{3,6} \cdot 100\% = 47,2\%$.

Видно, что индивидуальные значения признака отличаются в среднем от среднего арифметического на *1,7* кредита, или на *47,2* %. Полученные значения показателей вариации позволяют сделать вывод о значительной вариации количества выданных ипотечных кредитов банком *N* в рабочие дни месяца.

Показатели формы распределения

Под ***формой статистического распределения*** понимается форма графика вариационного ряда – полигона или гистограммы. Формы графиков могут быть разнообразными. Прежде всего, они делятся на симметричные и несимметричные (асимметричные). Распределение называется ***симметричным***, если частоты любых вариантов, равностоящих от среднего, равны между собой. При изучении экономических явлений чаще встречаются асимметричные распределения.

Умеренно асимметричными называются распределения, в которых частоты, находящиеся по одну сторону от наибольшей, больше (или меньше) частот, находящихся по другую сторону от наибольшей на том же расстоянии. Асимметрия может быть левосторонняя и правосторонняя. ***Прилевостороннейасимметрии*** частоты сначала медленно возрастают, а затем очень быстро убывают. ***Приправосторонней*** – наоборот.

Для характеристики асимметрии применяются разные показатели. Наиболее распространённым является показатель, основанный на определении центрального момента третьего порядка $\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^3 m_i}{\sum_{i=1}^{v} m_i}$.

В симметричных вариационных рядах μ_3 равен *0*, при μ_3 *<0* имеет место левосторонняя асимметрия, при μ_3 *>0* – правосторонняя. Нормированный момент третьего порядка называется ***коэффициентом асимметрии*** $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Асимметрия считается существенной, если As по модулю больше *0,5*.

Графики вариационных рядов могут быть ***низковершинными*** и ***высоковершинными***. Имеется в виду выпад вершины эмпирического распределения вниз или вверх от вершины кривой нормального распределения.

Показатели эксцесса рассчитываются для симметричных распределений. Наибольшее распространение имеет ***коэффициент эксцесса*** $Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, где $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ - нормированный момент четвёртого порядка. Для нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, следовательно, при $Ex = 0$ распределение нормальное, при $Ex < 0$ – низковершинное, при $Ex > 0$ – высоковершинное.

Пример 11. По данным примера *3* вычислить показатели формы распределения.

Как видно на рисунке *1* распределение рабочих дней месяца по количеству выданных ипотечных кредитов несимметрично. О существенности асимметрии позволяет судить значение коэффициента асимметрии. Для его определения сначала вычисляется центральный момент третьего
порядка:

$$\mu_3 = \frac{(0-3,6)^3\cdot 1 + (1-3,6)^3\cdot 2 + (2-3,6)^3\cdot 3 + (3-3,6)^3\cdot 4 + (4-3,6)^3\cdot 6}{1+2+3+4+6+4+2+1} +$$

$$+ \frac{(5-3,6)^3\cdot 4 + (6-3,6)^3\cdot 2 + (7-3,6)^3\cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = -0,724.$$

Коэффициент асимметрии - $As = \frac{-0,724}{4,938} = -0,147$. Следовательно, в данном ряду распределения асимметрия левосторонняя, несущественная.

Можно рассчитать коэффициент эксцесса. В первую очередь определяется центральный момент четвёртого порядка:

$$\mu_4 = \frac{(0-3,6)^4\cdot 1 + (1-3,6)^4\cdot 2 + (2-3,6)^4\cdot 3 + (3-3,6)^4\cdot 4 + (4-3,6)^4\cdot 6}{1+2+3+4+6+4+2+1} +$$

$$+ \frac{(5-3,6)^4\cdot 4 + (6-3,6)^4\cdot 2 + (7-3,6)^4\cdot 1}{1+2+3+4+6+4+2+1} = 21,524.$$

Далее вычисляется коэффициент эксцесса - $Ex = \frac{21,524}{8,41} - 3 = -0,44$.
Таким образом, изучаемое распределение низковершинное.

ЗАДАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ

По данным задач 1 и 2 требуется:

1) Построить вариационный ряд и изобразить его графически.

2) Определить меры центральной тенденции.

3) Рассчитать показатели вариации и прокомментировать полученные значения.

4) Вычислить показатели асимметрии и эксцесса и сделать вывод о форме распределения.

Задача 1.

Вариант 0.

В отделе дамской обуви универмага в течение дня были проданы туфли следующих размеров: 37, 35, 36, 37, 38, 37, 36, 37, 39, 38, 37, 36, 37, 37, 36.

Вариант 1.

На телефонной станции в течение часа проводились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Были получены следующие результаты: 3, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 4, 0, 3, 0, 2, 2, 0, 2, 1, 4, 3, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 4, 1, 3, 2, 7, 2, 0, 0, 1, 3, 3, 1, 2, 4, 2, 0, 2, 3, 1, 2, 5, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 5, 2, 3.

Вариант 2.

Администрацию универсама интересуют среднемесячные объёмы покупок товаров, которые не являются предметом ежедневного потребления. В течение января менеджер универсама регистрировал частоту покупок 100-граммовых пакетов с содой и собрал следующие данные: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8.

Вариант 3.

Наблюдения за числом изготовленных в течение смены деталей рабочими цеха дали следующие результаты: 21, 23, 20, 24, 24, 25, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 24, 25, 22, 23, 24, 24, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 25, 23, 24.

Вариант 4.

Чтобы выяснить, какие суммы (руб.) тратят студенты второго курса в течение дня, питаясь в кафе университета, проведён опрос 27 случайно отобранных студентов. Были получены следующие результаты:16, 12, 15, 15, 23, 9, 15, 13, 14, 14, 21, 15, 14, 17, 27, 15, 16, 12, 16, 19, 14, 16, 17, 13, 14, 14, 19.

Вариант 5.

В отделе мужской обуви универмага в течение дня были проданы ботинки следующих размеров: 39, 38, 40, 41, 41, 42, 39, 43, 42, 40, 40, 41, 42, 41, 42, 41, 43.

Вариант 6.

Тарифные разряды рабочих цеха: 4, 3, 6, 4, 4, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 2, 3, 4, 4, 5, 2, 3, 6, 5, 4, 2, 4, 3.

Вариант 7.

Имеются следующие данные о размере семьи работников цеха (число человек в семье): 3, 4, 5, 2, 3, 6, 4, 2, 5, 3, 4, 2, 7, 3, 3, 6, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 4, 3, 3, 4.

Вариант 8.

Тарифные разряды рабочих цеха: 4, 5, 6, 4, 4, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 5, 2, 3, 6, 5, 4, 6, 4, 3.

Вариант 9.

Дневная производительность труда рабочих бригады, выполняющих одинаковую операцию по обработке детали № 408, следующая (шт.): 19, 18, 20, 20, 21, 22, 21, 19, 23, 22, 22, 20, 21, 20, 23, 21, 20, 21, 20, 19.

<u>Задача 2.</u>

Для оценки качества выпускаемых изделий замеряли диаметр валиков после шлифовки. Были получены следующие результаты (мм)[**]

6,75	6,77	6,77	6,73	6,76	6,74	6,70	6,75	6,71	6,72	6,77	6,79	6,71	6,78
6,73	6,70	6,73	6,77	6,75	6,74	6,71	6,70	6,78	6,76	6,81	6,69	6,80	6,80
6,77	6,68	6,74	6,70	6,70	6,74	6,77	6,83	6,76	6,76	6,82	6,77	6,71	6,74
6,77	6,75	6,74	6,75	6,77	6,72+0,01N	6,74	6,80	6,75	6,80	6,72	6,78	6,70	6,75
6,78	6,78	6,76	6,77	6,74	6,74	6,77	6,73	6,74	6,77	6,74	6,75	6,74	6,76
6,76	6,74	6,74	6,74	6,74	6,76	6,74	6,72	6,80	6,76	6,78	6,73	6,70	6,76
6,76	6,77	6,75	6,78	6,72	6,76	6,78	6,68	6,75	6,73	6,82	6,73	6,80	6,81
6,71	6,82	6,77	6,80	6,80	6,70	6,70	6,82	6,72	6,69	6,73	6,76	6,74	6,77
6,72	6,76	6,78	6,78	6,73	6,76	6,80	6,76	6,72	6,76	6,76	6,70	6,73	6,75
6,77	6,77	6,70	6,81	6,74	6,73	6,77	6,74	6,78	6,69	6,74	6,71	6,76	6,76
6,77	6,70	6,81	6,74	6,74	6,77	6,75	6,80	6,74	6,76	6,77	6,77	6,81	6,75
6,78	6,73	6,76	6,76	6,76	6,77	6,76	6,80	6,77	6,74	6,77	6,72	6,75	6,76
6,77	6,81	6,76	6,76	6,76	6,80	6,74	6,80	6,74	6,73	6,75	6,77	6,74	6,76

6,77 6,77 6,75 6,76 6,74 6,82 6,76 6,73 6,74 6,75 6,76 6,72 6,78 6,72
6,76 6,77 6,75 6,78

**N – номер варианта

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскеров, П.Ф. Общая и прикладная статистика: учебник для студентов вузов, обучающихся по направлению "Статистика" и другим экономическим специальностям / П.Ф. Аскеров, Р.Н. Пахунова, А.В. Пахунов. - Москва: ИНФРА-М, 2014. – 272 с.

2. Ефимова, М.Р. Общая теория статистики: учеб. для вузов по специальностям: финансовый менеджмент, бухгалт. учёт и аудит, междунар. экон. отношения / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2009. – 416 с.

3. Общая теория статистики: учебник для вузов / под ред. М.Г. Назарова. - Москва: Омега-Л, 2010. – 410 с.

4. Статистика: учебник для бакалавров / под общ. ред. Л. И. Ниворожкиной. - Москва: Дашков и К, 2011. – 415 с.

5. Общая теория статистики: методическое пособие по выполнению практических работ. Часть I / сост.: Н.А. Никитина. - Вологда: ВоГТУ, 2009. – 63 с.

6. Годин, А.М. Статистика [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров / А.М. Годин. - 11-е изд., перераб. и испр. – Москва: Дашков и Ко, 2014. – 412 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=253808.

7. Гусаров, В.М. Статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.М. Гусаров, Е.И. Кузнецова. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юнити-Дана, 2012. – 480 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117190.

8. Никифорова, Н.Г. Статистика: теория и практика в Excel [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Г. Никифорова, В.С. Лялин, И.Г. Зверева. - Москва: Финансы и статистика, 2010. – 448 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=78916.

9. Улитина, Е.В. Статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.В. Улитина, О.В. Леднева, О.Л. Жирнова; под ред. Е.В. Улитиной. - 3-е изд., стер. - Москва: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – 320 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=252966.

10. Шелобаева, И.С. Статистика [Электронный ресурс]: практикум: учебное пособие / И.С. Шелобаева, С.И. Шелобаев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юнити-Дана, 2012. – 208 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=119522 .

2.2. Тестовые задания (ТЗ)

ТЗ №1 Тема: Элементы комбинаторики

Вариант 1.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

1) 30 2) 100 3) 120 4) 5

2. В 9«Б» классе 32 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

1) 128 2) 35960 3) 36 4)46788

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

1) 10 2) 60 3) 20 4) 30

4. Вычислить: 6! -5!

1) 600 2) 300 3) 1 4) 1000

5. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

6. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

7. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

Вариант 2.

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1) 100 2) 30 3) 5 4) 120

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

1) 3 2) 6 3) 2 4) 1

3. Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков.

1) 10000 2) 60480 3) 56 4) 39450

4. Вычислите: $\frac{8!}{6!}$

1) 2 2) 56 3) 30 4) $\frac{4}{3}$

5. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

7. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

Вариант 3.

1. Сколькими способами можно расставить 4 различные книги на книжной полке?

1) 24 2) 4 3) 16 4) 20

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

1) 30 2) 21 3) 14 4) 7

3. В футбольной команде 11 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1) 22 2) 11 3) 150 4) 110

4. Сократите дробь: $\frac{n!}{(n+1)!}$

1) 1 2) $\frac{n}{n+1}$ 3) $\frac{1}{n+1}$ 4) $\frac{2}{n+1}$

5. Какова вероятность, что при одном броске игрального кубика выпадает число очков, равное четному числу?

1) $\frac{1}{6}$ 2) 0,5 3) $\frac{1}{3}$ 4) 0,25

6. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

1) 0,25 2) 0, 4 3) 0,48 4) 0,2

7. Завод выпускает 15% продукции высшего сорта, 25% - первого сорта, 40% - второго сорта, а все остальное – брак. Найти вероятность того, что выбранное изделие не будет бракованным.

1) 0,8 2) 0,1 3) 0,015 4) 0,35

Вариант 4

1. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 5 человек?

1) 5 2) 120 3) 25 4) 100

2. Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

1) 12650 2) 100 3) 75 4)10000

3. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры. Которых нечетные и различные.

1) 120 2) 30 3) 50 4) 60

4. Упростите выражение: $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

1) 0,5 2) $\frac{n+1}{n-2}$ 3) $n^3 - n$ 4) n^2 -1

5. Какова вероятность, что ребенок родится 7 числа?

1) $\frac{7}{30}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{7}{31}$ 4) $\frac{7}{365}$

6. Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем попадания первого стрелка составляет 90%, второго – 80%, третьего – 70%. Найдите вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень?

1) 0,504 2) 0,006 3) 0,5 4) 0,3

7. Из 30 учеников спортсласса, 11 занимается футболом, 6 – волейболом, 8 – бегом, а остальные прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса занимается игровым видом спорта?

1) $\frac{17}{30}$ 2) 0,5 3) $\frac{28}{30}$ 4) $\frac{14}{30}$

3. Комплект оценочных средств для промежуточной аттестации

3.1. Контрольные вопросы (КВ)

КВ 1. Теория вероятности (достоверное, невозможное, случайное события).
КВ 2. Частота событий и ее свойства.
КВ 3. Теорема умножения вероятностей.
КВ 4. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
КВ 5. Теорема сложения вероятностей совместных событий.
КВ 6. Формулы для вычисления вероятностей.
КВ 7. Перестановка, размещения, сочетания.
КВ 8. Формула полной вероятности.
КВ 9. Формула гипотез Байеса.
КВ 10. Формулы Бернулли.
КВ 11. Случайные величины. Функция распределения случайной величины.
КВ 12. Равномерный закон распределения.
КВ 13. Числовые характеристики случайных величин.
КВ 14. Общие определения математического ожидания.
КВ 15. Дисперсия СВ, среднеквадратическое отклонение СВ.
КВ 16. Основные распределения вероятностей.
КВ 17. Биноминальное распределение.
КВ 18. Распределение Пуассона.
КВ 19. Нормальное распределение (Гаусса).
КВ 20. Предмет, Объект и Задачи математической статистики.
КВ 21. Статистическое распределение (полигон частот).
КВ 22. Гистограмма.

4. Критерии оценивания

«5» «отлично»– студент показывает глубокое и полное овладение содержанием программного материала по УД, в совершенстве владеет понятийным аппаратом и демонстрирует умение применять теорию на практике, решать различные практические и профессиональные задачи, высказывать и обосновывать свои суждения в форме грамотного, логического ответа (устного или письменного), а также высокий уровень овладение общими и профессиональными компетенциями и демонстрирует готовность к профессиональной деятельности;

«4» «хорошо»– студент в полном объеме освоил программный материал по УД, владеет понятийным аппаратом, хорошо ориентируется в изучаемом материале, осознанно применяет знания для решения практических и профессиональных задач, грамотно излагает ответ, но содержание, форма ответа (устного или письменного) имеют отдельные неточности, демонстрирует средний уровень овладение общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности;

«3» «удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений программного материала по УД но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, в применении знаний для решения практических и профессиональных задач, не умеет доказательно обосновать свои суждения, но при этом демонстрирует низкий уровень овладения общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности;

«2» «неудовлетворительно» – студент имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, беспорядочно и неуверенно излагает программный материал по УД, не умеет применять знания для решения практических и профессиональных задач, не демонстрирует овладение общими и профессиональными компетенциями и готовность к профессиональной деятельности.

5. Информационное обеспечение

перечень учебных изданий, электронных изданий, электронных и Интернет-ресурсов, образовательных платформ, электронно-библиотечных систем, веб-систем для организации дистанционного обучения и управления им, используемые в образовательном процессе как основные и дополнительные источники.

Основные источники:

1.Теория вероятностей и математическая статистика (2- е изд., стер.) учебник / Спирина М.С. - М.: ИЦ Академия, 2018 - 352 с.

2.Теория вероятностей и математическая статистика: Сборник задач (2-е изд., стер.) учеб. пособие / Спирина М.С. - М.: ИЦ Академия, 2018 - 192 с.

Дополнительные источники:

3. Математика: Учебник / В.П. Григорьев.- М.: ИЦ Академия, 2016.-368 с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика,7-е изд., стер., учебник/Спирина М.С.- М.: ИЦ Академия,2016– 352 с.

Электронные издания (электронные ресурсы)

4. Цифровая образовательная среда СПО PROFобразование:

- Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б. А. Севастьянов. — Москва, Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2019. — 272 с. — ISBN 978-5-4344-0741-0. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/97366 (дата обращения: 05.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

- Коробейникова, И. Ю. Математика. Теория вероятностей : учебное пособие для СПО / И. Ю. Коробейникова, Г. А. Трубецкая. — Саратов : Профобразование, 2019. — 154 с. — ISBN 978-5-4488-0344-4. — Текст : электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/86073 (дата обращения: 05.09.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Электронно-библиотечная система:

IPR BOOKS - http://www.iprbookshop.ru/78574.html

Веб-система для организации дистанционного обучения и управления им:

Система дистанционного обучения ОГАПОУ «Алексеевский колледж» http://moodle.alcollege.ru/